

3.3TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG
KHOA SƯ PHẠM TỰ NHIÊN



BÀI GIẢNG

Học phần: GIẢI TÍCH 2

Mã học phần : 22

Ngành đào tạo : SƯ PHẠM TOÁN HỌC

1. Giảng viên biên soạn:

ThS. PHAN BÁ TRÌNH

2. Số tín chỉ: 03

3. Đơn vị quản lý học phần: Bộ môn Toán

- Khoa Sư phạm Tự nhiên

Quảng Ngãi, tháng 7 - 2024

MỤC LỤC

Mục lục	2
Lời nói đầu	3
Chương 1 NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN KHÔNG CÁC ĐỊNH.....	4
Bài 1. Nguyên hàm và Tích phân không xác định	4
Bài 2. Các phương pháp tính Tích phân không xác định.....	7
Bài tập chương 1.....	22
Chương 2 TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH	23
Bài 1. Khái niệm về Tích phân xác định.....	23
Bài 2. Phương pháp tính Tích phân xác định.....	31
Bài 3. Tích phân suy rộng.....	37
Bài 4. Ứng dụng của Tích phân xác định.....	46
Bài tập chương 2.....	54
Chương 3. CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI HÀM	55
Bài 1. Chuỗi số.....	55
Bài 2. Chuỗi hàm.....	66
Bài tập chương 3.....	77
Tài liệu tham khảo	79

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích 2 là phần kiến thức toán học tiếp nối chương trình Giải tích 1 dành cho sinh viên đại học Sư phạm Toán năm thứ Nhất.

Nội dung và các chương mục của bài giảng này được biên soạn trong phạm vi 02 tín chỉ và theo sát chương trình đã quy định của Bộ Giáo dục & Đào tạo và của Trường Đại học Phạm Văn Đồng.

Nội dung “ Bài giảng Giải tích 2” gồm 3 chương:

Chương 1. Nguyên hàm và tích phân không xác định

Chương 2. Tích phân xác định

Chương 3. Chuỗi số và chuỗi hàm

Bài giảng đã trình bày những nội dung căn bản như sau:

Các khái niệm cơ bản về nguyên hàm và tích phân không xác định; Tích phân xác định và một số ứng dụng của tích phân xác định. Trong phần tích phân xác định có kiến thức mới là Tích phân suy rộng với cận vô hạn và tích phân suy rộng với cận hữu hạn. Một phần kiến thức khá hấp dẫn và mới đối với sinh viên là Chuỗi số và chuỗi hàm.

Đặc biệt, sau mỗi chương có phần bài tập rất phong phú để sinh viên củng cố kiến thức và rèn luyện kỹ năng tính toán.

Bài giảng Giải tích 2 có nhiều kiến thức mới, hay nhưng cũng khá phức tạp. Do đó, sinh viên phải tập trung nỗ lực hết sức để tiếp thu các khái niệm, định nghĩa và nắm chắc các công thức, phương pháp của từng nội dung và vận dụng tính toán một cách thành thạo nhằm mang lại những kết quả tốt đẹp.

Kinh nghiệm cho thấy rằng, nếu sinh viên nào không hiểu đầy đủ các quy tắc suy luận logic, không nắm vững các công thức toán học thì gặp nhiều khó khăn trong tiếp thu bài học cũng như vận dụng vào việc giải bài tập.

Bài giảng đã giới thiệu các ví dụ minh họa thật đơn giản, dễ hiểu giúp người học dễ dàng tiếp cận với khối lượng kiến thức khá hấp dẫn và thú vị của từng chương. Chúng tôi hy vọng rằng “Bài giảng Giải tích 2” là một tài liệu học tập bổ ích cho sinh viên và là nguồn tư liệu phong phú cho quý Thầy, Cô giáo tham khảo, nghiên cứu.

Đây là lần viết đầu tiên, chắc chắn bài giảng còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi hết sức chân thành cảm ơn sự góp ý, nhận xét của bạn đọc về nhiều phương diện để nội dung bài giảng ngày càng được tốt hơn.

Tác giả

CHƯƠNG 1.

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

Bài 1.

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

1.1 NGUYÊN HÀM

1.1.1 Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong (a,b) .

Nếu tồn tại hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F'(x) = f(x); x \in (a,b)$, thì $F(x)$ gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trong (a,b) , nếu có thêm $F'(a+0) = f(a); F'(b-0) = f(b)$ thì ta nói $F(x)$ là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

Ví dụ 1.1

i) $F(x) = \sin x - 2$ là nguyên hàm của $f(x) = \cos x; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $F'(x) = (\sin x - 2)' = \cos x = f(x)$.

ii) $F(x) = x^5 + 3$ là nguyên hàm của $f(x) = 5x^4; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $F'(x) = (x^5 + 3)' = 5x^4 = f(x)$.

1.1.2 Các định lý về nguyên hàm

Định lý 1.1 Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì nó có nguyên hàm trên $[a,b]$

Định lý 1.2

i) Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$ thì $F(x) + C$; với C là hằng số tùy ý, cũng là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b]$.

ii) Nếu $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm nào đó của $f(x)$ trên $[a,b]$ thì $\exists C \in \mathbb{R}$ sao cho $G(x) = F(x) + C; \forall x \in [a,b]$. Hay nói cách khác: Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$.

Chứng minh:

i) Vì $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$

$\Rightarrow (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) \Rightarrow F(x) + C$ là nguyên hàm của $f(x)$

ii) Ta có $[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$ nên $\exists C \in \mathbb{R}$ sao cho $G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C$.

1.2 ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

1.2.1 Định nghĩa: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trong (a,b) hay trên $[a,b]$ thì biểu thức $F(x) + C$; C là hằng số tùy ý, được gọi là tích phân không xác định của $f(x)$ trong (a,b) hay trên $[a,b]$.

Kí hiệu: $\int f(x)dx$.

Vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

+ Dấu $\int$ được gọi là dấu tích phân.

+ $f(x)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân.

+ $f(x)dx$ được gọi là biểu thức dưới dấu tích phân.

+ x gọi là biến số tích phân.

1.2.2 Các ví dụ

Ví dụ 1.2

$$a) \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

$$b) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

Ví dụ 1.3 Cho $f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + C; & x \geq 0 \end{cases}$$

1.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

1.3.1 Tính chất 1.

$$a) \left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad b) d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

1.3.2 Tính chất 2.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

Chứng minh.

Ta có:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \Rightarrow \int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

1.3.3 Tính chất 3.

Nếu $f(x)$ có nguyên hàm trong (a,b) thì $k.f(x)$ cũng có nguyên hàm trong (a,b) với $\forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ và:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

Chứng minh.

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trong (a,b) .

Khi đó:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow k \int f(x)dx = kF(x) + k.C \quad (1)$$

Mà $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$ và C là hằng số tùy ý nên $C.k$ cũng là hằng số tùy ý. Suy ra $kF(x) + Ck$ là tích phân không xác định của hàm số $kf(x)$ trong (a,b) .

$$\text{Suy ra:} \quad \int kf(x)dx = kF(x) + Ck \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra:} \quad \int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

1.3.4 Tính chất 4.

Nếu $f(x), g(x)$ đều có nguyên hàm trong (a,b) thì $f(x) \pm g(x)$ cũng có nguyên hàm trong khoảng đó và:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

1.3.5 Tính chất 5.

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ trong (a,b) và u là biến độc lập hay phụ thuộc đơn điệu lấy giá trị trong (a,b) thì:

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

1.4 BẢNG CÁC TÍCH PHÂN CƠ BẢN

1) $\int adx = ax + C$ với a là hằng số.

2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ với $\alpha \neq -1$;

$$\int \frac{dx}{x^\beta} = \frac{-1}{(\beta-1)x^{\beta-1}} + C \text{ (hằng số } \beta \neq 1); \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ với $0 < a \neq 1$;

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C; \alpha \neq 0; \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4) \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C \quad (a \neq 0) \quad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C \quad \int \cot g x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 g^2 x) dx = -\cot g x + C$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C_1 = -\arccos \frac{x}{a} + C_2; a > 0; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2; a > 0; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C_1 = -\frac{1}{a} \operatorname{arc cot} g \frac{x}{a} = C_2; \text{ với } a > 0.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arc cot} g x + C_2.$$

$$6) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C; \text{ với } a > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \text{ với } a > 0.$$

$$7) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C \quad \text{với } b \neq 0.$$

$$8) \int \sqrt{x^2 + b} . dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + b} + \frac{b}{2} . \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C \quad \text{với } b \neq 0.$$

Bài 2

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

2.1 PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

2.1.1 Đổi biến số dạng $u = u(x)$

Định lý 2.1 Nếu $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục đối với $x \in (a, b)$ và có $f(x)dx = g(u)du$ thì trong (a, b) ta có:

$$\int f(x)dx = \int g(u)du.$$

Ví dụ 2.1 Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$ b) $\int \sqrt{e^x - 1} dx$ c) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 1} dx$ d) $\int x(x+1)^{10} dx$

Giải. a) Đặt: $u = \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow u^2 = x^2 + 3 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Rightarrow udu = xdx$.

Do đó:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 3}} = \int \frac{u du}{u} = \int du = u + C = \sqrt{x^2 + 3} + C.$$

b) Đặt $u = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow u^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2udu = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2udu}{e^x}$

Do $e^x = u^2 + 1$ nên $dx = \frac{2udu}{e^x} = \frac{2udu}{u^2 + 1}$.

Nên

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 1} dx &= \int u \cdot \frac{2udu}{u^2 + 1} = 2 \int \frac{u^2 du}{u^2 + 1} \\ &= 2 \int du - 2 \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= 2u - 2 \arctg u + C \\ &= 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctg \sqrt{e^x - 1} + C. \end{aligned}$$

Vậy: $\int \sqrt{e^x - 1} dx = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctg \sqrt{e^x - 1} + C.$

c) Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

Do đó

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} + 1} &= \int \frac{e^{2x} \cdot e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{u^2 du}{u^2 + 1} \\ &= \int du - \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= u - \arctg u + C \\ &= e^x - \arctg e^x + C \end{aligned}$$

Vậy $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} + 1} = e^x - \arctg e^x + C$

d) Đặt $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$; $x = u - 1$

Do đó

$$\begin{aligned} \int x(x+1)^{10} dx &= \int (u-1)u^{10} du \\ &= \int u^{11} du - \int u^{10} du \\ &= \frac{u^{12}}{12} - \frac{u^{11}}{11} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{(x+1)^{12}}{12} - \frac{(x+1)^{11}}{11} + C.$$

Vậy
$$\int x(x+1)^{10} dx = \frac{(x+1)^{12}}{12} - \frac{(x+1)^{11}}{11} + C.$$

2.1.2 Đổi biến dạng $x = \varphi(t)$

Định lý 2.2 Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục đối với x trên $[a, b]$ và $x = \varphi(t)$ là hàm số khả vi, đơn điệu đối với t trên $[\alpha, \beta]$ và lấy giá trị trên $[a, b]$.

Khi đó ta có:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Chứng minh.

Ta có: $\left(\int f(x) dx \right)_x = f(x)$ (1) và vì $x = \varphi(t)$ khả vi, đơn điệu nên $t'_x = \frac{1}{\varphi'(t)}$

Do đó:

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)_x &= \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)_t \cdot t'_x \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \cdot t'_x = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Ví dụ 2.2 Tính các tích phân sau:

$$\text{a) } \int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}; a > 0 \quad \text{c) } \int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad \text{d) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$$

Giải. a) Ta thấy rằng, hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1; 1]$.

Đặt $x = \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (lúc đó $x = \sin t$ khả vi, đơn điệu và lấy giá trị trên $[-1, 1]$). Ta có:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos t \\ \Rightarrow dx &= \cos t dt; \\ \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\sin^2 t} \\ &= \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t; -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos t \cdot \cos t dt \\ &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dt + \int \cos 2t dt \right) \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C. \end{aligned}$$

Vì $x = \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ nên $t = \arcsin x$

và
$$\frac{1}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} \sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}.$$

Vậy
$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C.$$

Tổng quát: Bằng cách đặt $x = a \sin t$; $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; $a > 0$. Ta có:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

b) Hàm $f(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ liên tục trên khoảng $(-a, a)$

Đặt $x = a \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Hàm $x = a \sin t$ có miền giá trị $(-a, a)$ khả vi liên tục trên miền xác định $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $dx = a \cdot \cos t \cdot dt$

Nên

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a \cdot \cos t \cdot dt}{a \cdot \cos t} \\ &= \int dt = t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Vậy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

c) Hàm $f(x) = \int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Đặt $x = \varphi(t) = t^3$. Hàm $x = \varphi(t)$ khả vi, có giá trị trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 Vì $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$, nên:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{\sin \sqrt[3]{t^3}}{\sqrt[3]{t^6}} \cdot 3t^2 dt \\ &= 3 \int \sin t \cdot dt \\ &= -3 \cos t + C = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C. \end{aligned}$$

Vậy

$$\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = -3 \cos \sqrt[3]{x} + C.$$

d) Ta thấy rằng: $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x-9}}$ liên tục trong $\left(\frac{9}{2}; \infty\right)$.

Đặt $x = \frac{t^2 + 9}{2}$; ($t = \sqrt{2x-9}$). Ta có: $dx = t \cdot dt$

Do đó

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} &= \int \frac{t \cdot dt}{\left(\frac{t^2 + 9}{2}\right) \cdot t} \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{t}{3} + C \\ &= \frac{2}{3} \arctg \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C. \end{aligned}$$

Vậy

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \frac{2}{3} \arctg \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

2.2 PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Định lý 2.3 Giả sử $u = u(x)$; $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục đối với $x \in (a, b)$. Khi đó, với $\forall x \in (a, b)$. Ta có:

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx .$$

(Viết gọn $\int u.dv = uv - \int v.du$).

Chứng minh.

Ta có: $(uv)' = u'v + uv'$ nên $\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx$
 $\Rightarrow uv = \int vdu + \int u dv$ (theo định nghĩa của vi phân).

Do vậy: $\int u.dv = u.v - \int v.du$

Ví dụ 2.3 Tính các tích phân sau:

a) $\int x.\cos x.dx$ b) $\int \frac{\arctg x}{x^2} dx$ c) $\int x e^{3x} dx$ d) $\int x^2 e^{3x} dx$

Giải. a) Đặt

$$\left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right.$$

Ta có $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx .$
 $= x \sin x + \cos x + C$

Vậy $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$

b) Đặt

$$\left. \begin{array}{l} u = \arctg x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Do đó: $\int \frac{\arctg x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arctg x + \int \frac{du}{x(1+x^2)}$ (1)

Ta có: $\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$
 $= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2}$
 $= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
 $= \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra:

$$\int \frac{\arctg x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arctg x + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C .$$

Vậy

$$\int \frac{\arctg x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arctg x + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C .$$

c) Đặt

$$\left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{3x} dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right.$$

Ta có: $\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x.e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx .$

$$= \frac{e^{3x}}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C.$$

Vậy
$$\int x e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C.$$

d) Đặt $\left. \begin{array}{l} u = v^2 \\ dv = e^{3x} dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right.$

Ta có:
$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{x^2 \cdot e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{3x}}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C \\ &= \frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C. \end{aligned}$$

Vậy
$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) + C.$$

Chú ý 2.1 Khi tính những tích phân dạng $\int f(x).g(x)dx$ với $f(x)$, $g(x)$ là những hàm sơ cấp không cùng loại ta thường dùng phương pháp tích phân từng phần như sau:

a. Nếu $f(x)$ là hàm đa thức và $g(x)$ là những hàm thuận (như hàm $\sin x$, $\cos x$; hàm mũ) thì đặt:

$$u = f(x); dv = g(x)dx.$$

b. Nếu $f(x)$ là hàm đa thức và $g(x)$ là những hàm ngược lại (như hàm logarit, hàm ngược lượng giác) thì đặt: $u = g(x); dv = f(x)dx$.

c. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ đều là các hàm thuận thì đặt:

$$u = f(x); dv = g(x)dx \text{ hay } u = g(x); dv = f(x)dx$$

d. Nếu $f(x) = \sqrt{x^2 \pm a^2}$ hoặc $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$; $g(x) = 1$, thì đặt:

$$u = f(x); dv = g(x)dx = dx.$$

2.3 TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM HỮU TỶ

2.3.1 Tích phân hàm hữu tỷ đơn giản

i) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C; a \neq 0.$

ii) $\int \frac{dx}{(ax+b)^k} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{a(ax+b)^{k-1}} + C; (k \neq 0; a \neq 0).$

iii) $\int \frac{A dx}{x^2 + px + q}$. Biến đổi $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4}.$

Đặt $u = \left(x + \frac{p}{2} \right)$ chuyển tích phân về dạng: $\int \frac{A du}{u^2 \pm a^2}.$

iv) $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2 + px + q}$. Biến đổi $\frac{Ax+B}{x^2 + px + q} = \frac{A}{2} \left(\frac{2x+p}{x^2 + px + q} \right) + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{x^2 + px + q}.$

Sau đó đưa tích phân đã cho về dạng: $\int \frac{du}{u}$ và tích phân dạng iii).

Ta được kết quả:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \ln \left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2-4q}{4} \right] - \frac{2}{\sqrt{p^2-4q}} \left(\frac{2B-Ap}{2} \right) \arctg \frac{-(2x+p)}{\sqrt{p^2-4q}} + C.$$

Ví dụ 2.4 Tính: $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx$.

Ta có:

$$\frac{2x+3}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2+x+1}.$$

Nên suy ra:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int \frac{2dx}{x^2+x+1} \\ &= \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \int \frac{2dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \ln(x^2+x+1) + 2 \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctg \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\ &= \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{3} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Vậy
$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{3} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right) + C.$$

2.3.2 Tích phân hàm hữu tỷ dạng tổng quát: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$

i) Bậc $P_n(x) <$ bậc $Q_m(x)$; ($n < m$)

- Phân tích $Q_m(x)$ thành các nhị thức, tam thức hoặc các lũy thừa của chúng.

$$Q_m(x) = (a_1x+b_1)^\alpha \dots (a_2x+b_2)(A_1x^2+B_1x+C_1)^\beta \dots (A_2x^2+B_2x+C_2)$$

- Phân tích:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{M_1}{(a_1x+b_1)^\alpha} + \dots + \frac{M_\alpha}{a_1x+b_1} + \dots + \frac{N}{a_2x+b_2} + \dots \\ &+ \frac{E_x+F_1}{(A_1x^2+B_1x+C_1)^\beta} + \dots + \frac{E_\beta x+F_\beta}{A_1x^2+B_1x+C_1} + \dots + \frac{Gx+H}{A_2x^2+B_2x+C_2}. \end{aligned}$$

Với các hệ số:

$$M_1; \dots; M_\alpha; N; E_1; F_1; \dots; E_\beta; F_\beta; \dots; G; H$$

là các hằng số thực chưa biết.

Để xác định chúng, ta qui đồng mẫu số ở vế phải, sau đó đồng nhất thức 2 tử số ở vế trái và vế phải (hoặc cho x các giá trị đặc biệt) để đưa đến một hệ phương trình đối với các hệ số (*Phương pháp này gọi là hệ số bất định*).

Ví dụ 2.5 1) Tính $\int \frac{x \cdot dx}{x^3-1}$.

$$P_1(x) = x; Q_3(x) = x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3-1} &= \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}x &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \\ &= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C\end{aligned}\quad (1)$$

Cách 1 Đồng nhất thức 2 vế của (1) ta được:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=1 \Rightarrow A=-B=C=\frac{1}{3} \\ A-C=0 \end{cases}$$

Cách 2 Cho $x = 1$, từ (1) $\Rightarrow 1 = A \cdot 3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$$\text{Cho } x = 0, \text{ từ (1) } \Rightarrow 0 = A - C \Rightarrow C = A = \frac{1}{3}$$

$$\text{Cho } x = -1, \text{ từ (1) } \Rightarrow -1 = A + 2B - 2C = \frac{1}{3} + 2B - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{3}.$$

Do đó

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

Suy ra:

$$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dx}{x-1} - \int \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{x^2+x+1} dx.$$

Vậy

$$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx.$$

$$2) \text{ Tính } \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$$

Dùng phương pháp hệ số bất định, ta phân tích phân thức:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

thành tổng của những phân thức đơn giản. Ta có:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Qui đồng mẫu số ở vế phải, đồng nhất thức hai tử số ở vế phải và vế trái, ta được:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx$$

Sử dụng các kết quả ở mục i phần 2.3.2, ta thu được

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 2 \arctg x + C.$$

ii) Bậc $P_n(x) >$ bậc $Q_m(x)$; ($m \leq n$)

Ta chia $P_n(x)$ cho $Q_m(x)$ và phân tích $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rồi đưa về dạng đã biết.

Ví dụ 2.6 Tính $\int \frac{x^4 - 2x}{x^3 - 1} dx$ (Bậc tử là $4 >$ bậc mẫu là 3)

Ta có
$$\frac{x^4 - 2x}{x^3 - 1} = x - \frac{x}{x^3 - 1}.$$

Suy ra
$$\int \frac{x^4 - 2x}{x^3 - 1} dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^3 - 1} dx.$$

2.4 TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

2.4.1 Dạng $\int R(\cos x, \sin x) dx$ ($R(\cos x, \sin x)$ là biểu thức hữu tỷ đối với $\sin x$, $\cos x$)

Phương pháp chung. Đặt $t = \tg \frac{x}{2}$.

Khi đó
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ và } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Biến đổi tích phân dạng này về tích phân hàm hữu tỷ.

Ví dụ 2.7 Tính $\int \frac{dx}{\sin x + 1}.$

Đặt
$$t = \tg \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + 1} &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{2dt}{(1+t)^2} \\ &= -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \tg \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

Vậy
$$\int \frac{dx}{\sin x + 1} = -\frac{2}{1 + \tg \frac{x}{2}} + C.$$

Đặc biệt: i) Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$.

ii) Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$.

iii) Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tg x$.

Ví dụ 2.8 Tính $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx.$

Ta có

$$\begin{aligned} R(\sin x, \cos x) = \sin^2 x \cos^3 x &\Rightarrow R(\sin x, -\cos x) = \sin^2 x (-\cos x)^3 \\ &= -\sin^2 x \cos^3 x \\ &= -R(\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

Nên đặt: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \cdot dx.$

Ta có

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx \\ &= \int t^2 (1-t^2) dt \\ &= \int (t^2 - t^4) dt \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

Vậy

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2.4.2 Dạng $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$; $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$; $\int \cos ax \cdot \sin bx dx$

Phương pháp: Biến đổi các hàm dưới dấu tích phân thành tổng. Chẳng hạn:

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

Ví dụ 2.9 Tính $\int \cos 3x \cdot \sin 5x dx$

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos 3x \cdot \sin 5x &= \frac{1}{2} [\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)] \\ &= \frac{1}{2} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin 2x\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cdot \sin 5x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x \right] + C \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\cos 8x}{4} + \cos 2x \right) + C.\end{aligned}$$

Vậy

$$\int \cos 3x \cdot \sin 5x dx = -\frac{1}{4} \left(\frac{\cos 8x}{4} + \cos 2x \right) + C.$$

2.4.3 Dạng $\int \sin^n x dx$; $\int \cos^n x dx$

Phương pháp: + Cách 1: Áp dụng dạng i) phần đặc biệt.

+ Cách 2: Nếu n chẵn (n nhỏ) dùng công thức hạ bậc:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

đưa $\cos^n x$; $\sin^n x$ về hàm lượng giác có bậc nhỏ hơn, hoặc dùng tích phân từng phần, suy ra công thức truy hồi.

Ví dụ 2.10 Tính các tích phân sau:

a) $\int \cos^4 x dx$

b) $\int \sin^n x dx$; $n \in \mathbb{N}$

Giải. a) Ta có:

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} (\cos 4x + 1)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

Suy ra

$$\int \cos^4 x \cdot dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Vậy

$$\int \cos^4 x \cdot dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

b) Ta có: $\int \sin^n x \cdot dx = \int \sin^{(n-1)} x \cdot \sin x \cdot dx = I_n$

Đặt

$$\left. \begin{array}{l} u = \sin^{(n-1)} x \\ dv = \sin x \cdot dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = (n-1) \cdot \sin^{(n-2)} x \cdot \cos x \cdot dx \\ v = -\cos x \end{array} \right.$$

Do đó

$$I_n = -\cos x \cdot \sin^{(n-1)} x + (n-1) \int \sin^{(n-2)} x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{(n-1)} x + (n-1) \int \sin^{(n-2)} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{(n-1)} x + (n-1) \int \sin^{(n-2)} x - \sin^n x dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{(n-1)} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$$

Suy ra công thức truy hồi: $n \cdot I_n + (1-n) I_{n-2} = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x$

$$\text{với } I_{n-2} = \int \sin^{n-2} x \cdot dx.$$

2.5 TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM VÔ TỶ

Các hàm số vô tỷ có thể biến thành các hàm hữu tỷ với biến số mới $t = \omega(x)$ phù hợp. Sau đây ta xét tích phân bất định của một số lớp hàm có thể hữu tỷ hoá bằng cách trên.

2.5.1 Dạng hàm $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, trong đó R là một hàm hữu tỷ

Phương pháp: Sử dụng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \omega(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$

Ví dụ 2.11 Tính $A = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}.$

Giải.

Ta có

$$A = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}.$$

Đặt

$$t = \omega(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Khi đó

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1} \Rightarrow dx = -\frac{6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt$$

Vậy

$$A = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = -3 \int \frac{dt}{t^3 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{t^2 + t + 1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \cdot \arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}+C}; \quad t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

2.5.2 Dạng $\int R(x; x^{\frac{m}{n}}; x^{\frac{p}{q}}; \dots; x^{\frac{u}{v}}) dx$. Với $m, n, p, q, \dots, u, v \in \mathbb{Z}$

Phương pháp:

Đặt $t = \omega(x) = x^{\frac{1}{k}}$ với $k = \text{BSCNN}(n, q, \dots, v)$ (k là bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số $n, q, \dots, v$) ta thu được một tích phân của hàm hữu tỷ theo t .

Ví dụ 2.12 Tính $\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} - 1)} dx$.

Giải. Ta có: $k = \text{BSCNN}(4; 8) = 8$.

Đặt $t = \sqrt[8]{x} = x^{\frac{1}{8}} \Rightarrow x = t^8 \Rightarrow dx = 8t^7 dt$

$$\begin{aligned} \text{Do đó} \quad \int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} - 1)} dx &= \int \frac{\sqrt[4]{t^8} - \sqrt[8]{t^8}}{t^8(\sqrt[4]{t^8} - 1)} \cdot 8t^7 dt \\ &= \int \frac{t^2 - t}{t^8(t^2 - 1)} \cdot 8t^7 dt \\ &= 8 \int \frac{t - 1}{t^2 + 1} dt \\ &= 8 \int \frac{dt}{t + 1} \\ &= 8 \ln|t + 1| + C = 8 \ln|\sqrt[8]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

Vậy
$$\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} - 1)} dx = 8 \ln|t + 1| + C = 8 \ln|\sqrt[8]{x} + 1| + C.$$

Chú ý 2.2 Ta có thể kết hợp 2 dạng trên để tính tích phân dạng:

$$\int R \left[x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{u}{v}} \right] dx$$

Phương pháp: Đặt $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{k}}$; $k = \text{BSCNN}(n, \dots, v)$

2.5.3 Dạng $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx; a \neq 0$

Phương pháp chung: + Biến đổi $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

+ Chuyển tích phân đã cho về 1 trong 3 dạng sau:

i) $\int R_1(u, \sqrt{\alpha^2 + u^2}) du$. Đặt $u = \alpha \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

ii) $\int R_2(u, \sqrt{\alpha^2 - u^2}) du$. Đặt $u = \alpha \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

iii) $\int R_3(u, \sqrt{u^2 - \alpha^2}) du$. Đặt $u = \frac{\alpha}{\cos t}$ với $t \in (0; \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

Ví dụ 2.13 a) Tính $I = \int \sqrt{-x^2 + 4x + 5} dx$

Ta có
$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 5 &= -(x^2 - 4x - 5) \\ &= -[(x^2 - 2 \cdot 2x + 4) - 9] \\ &= -(x - 2)^2 - 9 \\ &= 9 - (x - 2)^2. \end{aligned}$$

Do đó
$$\int \sqrt{-x^2 + 4x + 5} dx = \int \sqrt{9 - (x - 2)^2} dx.$$

Đặt $x - 2 = u \Rightarrow dx = du$
 Thế thì $\int \sqrt{9 - (x - 2)^2} dx = \int \sqrt{9 - u^2} du$.
 Đặt $u = 3\sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 Suy ra $du = 3\cos t dt$;
 $\sqrt{9 - u^2} = 3\cos t; t = \arcsin \frac{u}{3} = \arcsin \frac{x - 2}{3}$

Khi đó $\int \sqrt{9 - u^2} du = \int \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot (3\cos t) dt$
 $= \int 3|\cos t| \cdot 3\cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt$

Vì $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\cos t > 0$; nhưng $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$; nên

$$\begin{aligned} \int 9\cos^2 t dt &= 9 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C \quad (*) \\ &= \frac{9}{2}\arcsin \frac{u}{3} + \frac{1}{2}u\sqrt{9 - u^2} + C \\ &= \frac{9}{2}\arcsin \frac{x - 2}{3} + \frac{x - 2}{2}\sqrt{-x^2 + 4x + 5} + C. \end{aligned}$$

Vậy $I = \int \sqrt{-x^2 + 4x + 5} dx = \frac{9}{2}\arcsin \frac{x - 2}{3} + \frac{x - 2}{2}\sqrt{-x^2 + 4x + 5} + C.$

b) Tính $J = \int \frac{(x - 3)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} dx$

Ta có $J = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} + 4 \int \frac{d(x - 1)}{\sqrt{(x - 1)^2 + 3}}$
 $= \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 4 \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}| + C.$

Vậy $J = \int \frac{(x - 3)}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} dx = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 4 \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}| + C.$

Chú ý 2.3 Ngoài cách tính trên, ta có thể dùng *Phương pháp thế Euler* sau:

Ta biến đổi $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t \pm x\sqrt{a} & ; \text{ khi } a > 0 \\ xt \pm \sqrt{c} & ; \text{ khi } c > 0 \\ t(x - \alpha) & ; \text{ khi } \alpha \text{ là 1 nghiệm của } ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$

i) Trường hợp $a > 0$

Đặt: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}.$

Khi đó: $bx + c = t^2 \pm 2x.t\sqrt{a}.$

Suy ra: $x; \sqrt{ax^2 + bx + c}; \frac{dx}{dt}$

là các hàm hữu tỷ theo t .

Ví dụ 2.14 Tính $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Ta có: $a = 1 > 0.$

Đặt $\sqrt{x^2 - x + 1} = t + x$
 $\Rightarrow x^2 - x + 1 = t^2 + 2tx + x^2$

Suy ra $x = \frac{1-t^2}{2t+1} \Rightarrow dx = -\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2} dt$

và $\sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1}$

Do đó $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = -2 \int \frac{t^2+t+1}{(2t+1)(t+2)} dt$

Dùng phương pháp hệ số bất định, ta có:

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{t^2+t+1}{(2t+1)(t+2)} dt &= -2 \left[\frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{t \cdot dt}{2t^2+5t+2} \right] \\ &= -\int dt + 3 \int \frac{t \cdot dt}{2t^2+5t+2} \\ &= -t + 3 \left(\frac{2}{3} \int \frac{dt}{t+2} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{2t+1} \right) \\ &= -t + 2 \ln|t+2| - 2 \ln|2t+1| + C \\ &= -t + \ln \left(\frac{t+2}{2t+1} \right)^2 + C \end{aligned} \quad (1)$$

Thay $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ vào (1)

Ta có $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = x - \sqrt{x^2 - x + 1} + \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2}{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) + 1} \right)^2 + C$

ii) Trường hợp $c > 0$

Khi $c > 0$, ta đặt

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= xt \pm \sqrt{c} \\ \Rightarrow (a - t^2)x^2 + (b \pm 2t\sqrt{c})x &= 0. \end{aligned}$$

Vì x là biến tích phân và phương trình bậc 2 theo x cho ta:

$$x = \frac{b \pm 2t\sqrt{c}}{t^2 - a}$$

là một biểu thức hữu tỷ theo t . Ta suy ra một tích phân hàm hữu tỷ.

Ví dụ 2.15 Tính $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Ta thấy $c = 1 > 0$ nên ta có thể đặt

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = xt + 1$$

Suy ra $x^2 - x + 1 = t^2x^2 + 2tx + 1 \Leftrightarrow (t^2 - 1)x^2 + (2t + 1)x = 0$
 $\Leftrightarrow x[(t^2 - 1)x + (2t + 1)] = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2t+1}{1-t^2} \Rightarrow dx = 2 \frac{t^2+t+1}{(1-t^2)^2} dt$$

Do đó $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = 2 \int \frac{t^2+t+1}{(t+2)(t+1)(1-t^2)} dt.$

Dùng phương pháp hệ số bất định, ta có

$$\frac{t^2 + t + 1}{(t+2)(t+1)(1-t^2)} = \frac{1}{t+2} + \frac{1}{4(1-t)} - \frac{1}{4} \frac{3t+1}{(t+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{dt}{t+2} + \int \frac{dt}{4(1-t)} - \frac{1}{4} \int \frac{3t+1}{(t+1)^2} dt \\ &= \ln \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x - 1)^2}{x(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 1)} - \frac{1}{2} \ln \frac{(x-1-\sqrt{x^2 - x + 1})(x+1-\sqrt{x^2 - x + 1})}{x^2} + \frac{x}{x-1+\sqrt{x^2 - x + 1}} + C \end{aligned}$$

iii) Trường hợp $ax^2 + bx + c$ có 2 nghiệm thực phân biệt

Gọi α, β là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c$.

Khi đó: $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x-\alpha)$ hay $t(a-\beta)$, ta sẽ có một phương trình hữu tỷ theo t .

Ví dụ 2.16 Tính : $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0)$.

Ta có: $-a < x < a$. Đặt:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t(a-x)$$

thì: $a^2 - x^2 = t^2(a^2 - 2ax + x^2); t > 0$

Suy ra: $(t^2 + 1)x^2 - 2at^2x + (t^2 - 1)a^2 = 0$

Phương trình bậc 2 theo x này có $\Delta' = a^2$. Do vậy:

$$x_1 = a \text{ (loại)} \text{ và } x_2 = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \text{ nghĩa là chọn } x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó, ta có } \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}} &= \frac{1}{2a^2} \int \frac{2t^2 + 2}{t^4 + 1} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt \end{aligned}$$

Đặt $u = 1 - \frac{1}{t}$ thì $du = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt$ và $t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Do vậy } \frac{1}{a^2} \int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt &= \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 + 2} \\ &= \frac{1}{a^2 \sqrt{2}} \arctg \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{a^2 \sqrt{2}} \arctg \frac{1 - \frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + C \end{aligned} \quad (2)$$

Thay $t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a - x}$ vào (2), ta có

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{2}} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

Chú ý 2.4 Có một số tích phân không thể biểu diễn được dưới dạng những hàm sơ cấp, chẳng hạn các tích phân sau:

$$\int e^{-x^2} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$

$$\begin{aligned} & \int \sin(x^2) dx; \quad \int \cos(x^2) dx; \\ & \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx; \quad . \\ & \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx; \dots \end{aligned}$$

Khi gặp những tích phân trên, ta không nên tính toán mất thời gian mà chỉ nên để nguyên kết quả dưới dạng tích phân.

Nếu một tích phân nào đó mà qua một số hữu hạn các phép biến đổi hay tích phân từng phần, ta thấy xuất hiện một trong những tích phân trên thì tích phân đã cho ban đầu xem như không tính được.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

I. Nguyên hàm

1. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2(x-2)$ biết rằng $F(1) = \frac{7}{12}$.

Hãy tìm biểu thức $F(x)$.

2. Chứng minh rằng hàm $y = \operatorname{sign} x$ có nguyên hàm trên khoảng bất kỳ không chứa điểm $x = 0$ và không có nguyên hàm trên mọi khoảng chứa điểm $x = 0$.

3. Tìm nguyên hàm của hàm $f(x) = e^{|x|}$ trên toàn trục số.

4. Tìm nguyên hàm có đồ thị qua điểm $(2; 2)$ đối với hàm

$$f(x) = \frac{1}{x}; x \in (-\infty; 0).$$

II. Tích phân không xác định

Dùng bảng tích phân để tính

1) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

3) $\int \frac{x \cdot dx}{4+x^4}$

4) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

5) $\int \frac{e^{\arctg x} + x \cdot \ln(1+x^2) + 1}{(1+x^2)} dx$

Dùng phương pháp đổi biến số, tính các tích phân

6) $\int x(2x+5)^{10} dx$ 7) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ 9) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

Dùng phương pháp tích phân từng phần tính

10) $\int (x^2+5x+6) \cos 2x \cdot dx$ 11) $\int \ln^2 x \cdot dx$ 12) $I_1 = \int \sin(\ln x) dx; I_2 = \int \cos(\ln x) dx$

Tính tích phân hàm hữu tỷ

13) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$ 14) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$ 15) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x} dx$ 16) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

Tính tích phân các hàm vô tỷ:

17) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$ 18) $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ 19) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$ 20) $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$

Dùng phương pháp thế Euler tính các tích phân

21) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ 22) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x+x^2}}$

Tính tích phân các hàm lượng giác:

23) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ 24) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$ 25) $\int \frac{\cos 2x \cdot dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

=====

CHƯƠNG 2.

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Bài 1.

KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1.1 BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục không âm trên đoạn $[a, b]$ có đồ thị là đường cong (C).

Tìm diện tích của miền mặt phẳng giới hạn bởi trục Ox , đường cong (C) và các đường thẳng $x = a$; $x = b$ (tức diện tích hình thang cong $AabB$); (Hình 1.1). Để xác định diện tích hình thang cong $AabB$ ta thực hiện như sau:

Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Trong mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}; x_i]$ với $i = \overline{1; n}$. Ta chọn điểm t_i . Dựng hình chữ nhật có một cạnh là $(x_i - x_{i-1})$ và một cạnh bằng $f(t_i)$. Ta nhận thấy rằng khi đoạn $[x_{i-1}; x_i]$ khá bé hay

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ khá bé thì diện tích hình chữ nhật thứ i là: $S_i = f(t_i) \cdot \Delta x_i$.

Xấp xỉ diện tích phần thứ i của hình thang cong $AabB$; $i = \overline{1; n}$.

Nếu S là diện tích hình thang cong $AabB$ thì ta có: $S \approx \sum_{i=1}^n S_i$ với Δx_i khá bé $\forall i = \overline{1; n}$.

Người ta chứng minh được rằng, nếu tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i = S$ (với $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \rightarrow 0$).

1.2 ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1.2.1 Các định nghĩa.

Định nghĩa 1.1 Giả sử $f(x)$ là hàm xác định trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ tùy ý bởi các điểm chia $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. (Cách chia như vậy gọi là phép phân hoạch đoạn $[a, b]$).

Trên từng đoạn $[x_{i-1}; x_i]$ ta chọn điểm t_i tùy ý, $i = \overline{1; n}$.

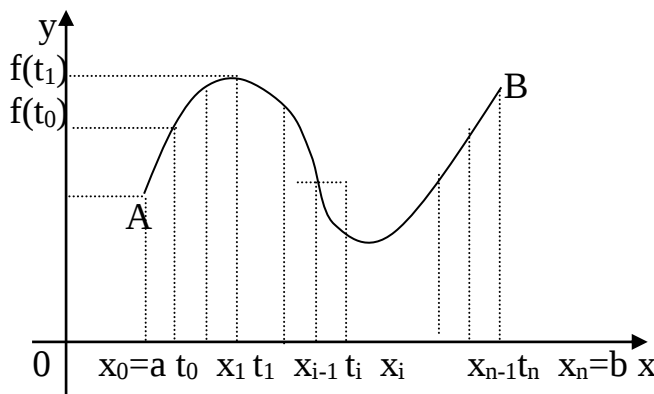
Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i$ với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ (với $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \rightarrow 0$) tồn tại hữu hạn không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn t_i thì giới hạn đó gọi là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$. Khi đó, ta gọi $f(x)$ là hàm khả tích trên $[a, b]$.

Ký hiệu: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

I_n : gọi là tổng tích phân của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

$[a, b]$: gọi là đoạn lấy phân; a : cận dưới; b : cận trên.



Hình 1.1

$\int_a^b$: dấu tích phân xác định; $f(x)$: hàm dưới dấu tích phân; x : biến số tích phân.

Định nghĩa 1.2 Cho $f(x)$ là hàm xác định tại a . Khi đó: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Định nghĩa 1.3 Cho $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$ với $a < b$. Khi đó: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

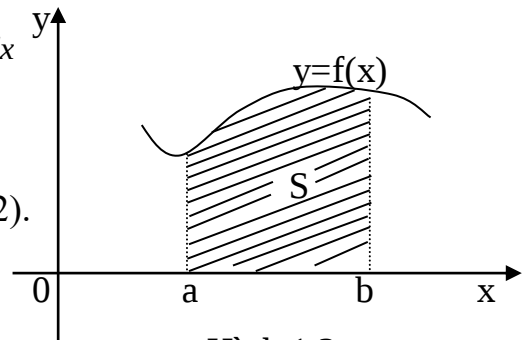
Chú ý 1.1 Tích phân xác định chỉ phụ thuộc vào hàm dưới dấu tích phân xác định, phụ thuộc vào các cận, không phụ thuộc vào biến số tích phân. Tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt.$$

1.2.2 Ý nghĩa hình học của tích phân xác định

Nếu $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x)$; $x = a$; $x = b$ và trục Ox (Hình 1.2). Gọi S là diện tích phần gạch chéo ở hình 1.2. Khi đó:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Hình 1.2

1.2.3 Định lý tồn tại tích phân xác định

1. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ hoặc có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.
2. Nếu $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$.

Ví dụ 1.1 Dùng định nghĩa để tính các tích phân sau:

a. $\int_0^1 xdx$

b. $\int_{-1}^2 x^2 dx$.

Giải. a. Do $f(x) = x$ liên tục đều trên $[0; 1]$ nên khả tích trên $[0; 1]$.

Chia $[0;1]$ thành n đoạn nhỏ tùy ý bởi các điểm chia:

$$0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n}{n} = 1. \text{ Lấy } t_i = \frac{i}{n}.$$

$$\text{Lập tổng } I_n = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n t_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

(Vì $f(x) = x \Rightarrow f(t_i) = t_i$; $\Delta x_i = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$). Nên

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n t_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n). \end{aligned}$$

Do $1 + 2 + \dots + n$ là tổng n số tự nhiên, nên:

$$I_n = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n+1}{2} \cdot n \right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Vậy
$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

($\Delta x_i \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, vì vậy ta viết: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}$ thay cho $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{n+1}{2n}$).

b. Do $f(x) = x^2$ liên tục trên $[-1; 2]$ nên khả tích trên $[-1; 2]$ và

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (t_i)^2 \cdot \Delta x_i.$$

Giới hạn này không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[-1; 2]$ và cách chọn điểm $t_i; i = \overline{1; n}$.

$$x_0 = -1; x_1 = -1 + \frac{3}{n}; x_2 = -1 + \frac{3}{n} \cdot 2; \dots; x_i = -1 + \frac{3}{n} \cdot i; \dots; x_n = 2.$$

Ta có: $\Delta x_i = \frac{3}{n}; i = \overline{1; n}$. Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}; x_i]$, chọn $t_i = x_i$. Khi đó:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^n (t_i)^2 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{3}{n} \cdot i\right)^2 \cdot \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{n} + \frac{27 \cdot i^2}{n^3} - \frac{18 \cdot i}{n^2}\right) \\ &= n \cdot \frac{3}{n} + \frac{27}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - \frac{18}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) \\ &= 3 + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 3 + \frac{27}{6} \cdot 2 - \frac{18}{2} = 3$. (Khi $n \rightarrow \infty \Rightarrow \max \Delta x_i = \frac{3}{n} \rightarrow 0$).

Vậy
$$\int_{-1}^2 x^2 dx = 3.$$

1.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1.3.1 CÁC TÍNH CHẤT

Giả sử $f(x); g(x)$ khả tích trên đoạn $[a; b]$; khi đó ta có các tính chất sau:

1. a. $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$; (k : hằng số). Đặc biệt: nếu $f(x) = 1$ thì

$$\int_a^b k \cdot dx = k \int_a^b dx = k \cdot (b - a)$$

b. $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx \pm \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$; ($\alpha; \beta$: là các hằng số).

2. a. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$; b. $\int_a^a f(x) dx = 0$;

c. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

3. Nếu $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

4. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

5. Nếu $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Đặc biệt: Nếu $\forall x \in [a; b]: |f(x)| \leq M$ thì $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$.

Chứng minh.

1. Sinh viên tự chứng minh.

2. Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = \overline{1; n}$.

Trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}; x_i]$ ta chọn điểm t_i với $i = \overline{1; n}$.

$$\text{Ta có } \sum_{i=1}^n [f(t_i) + g(t_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i.$$

Vì $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a; b]$ nên tồn tại:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i$$

Do đó, tồn tại

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(t_i) + g(t_i)] \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i;$$

$$(\max \Delta x_i \rightarrow 0).$$

Suy ra:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

3. Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = \overline{1; n}$.

Trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}; x_i]$ ta chọn điểm t_i với $i = \overline{1; n}$.

$$\text{Ta có: } \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i.$$

Vì $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a; b]$ nên tồn tại:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i$$

Do đó, tồn tại

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i; (\max \Delta x_i \rightarrow 0).$$

Suy ra:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

4. Vì $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ nên theo tính chất 3 ta có:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$\text{Suy ra: } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$5. \text{ Vì } m \leq f(x) \leq M \text{ nên } m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx .$$

$$\text{Theo tính chất 1, ta có: } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

1.3.2 CÁC ĐỊNH LÝ

1.3.2.1 Định lý về giá trị trung bình của tích phân xác định

Định lý 1.1 Nếu $\forall x \in [a; b]; m \leq f(x) \leq M$ thì tồn tại $\alpha \in [m; M]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \alpha(b-a).$$

Đặc biệt, nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì tồn tại $c \in [a; b]$ để

$$\int_a^b f(x) dx = f(c).(b-a).$$

Chứng minh. Nếu $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$\text{Suy ra } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M .$$

$$\text{Đặt } \alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

$$\text{Ta có: } \alpha(b-a) = \int_a^b f(x) dx .$$

Đặc biệt, $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên: nếu $m \leq f(x) \leq M$ thì $m; M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[a; b]$. Vì vậy, nếu có:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \text{ thì tồn tại } c \in [a; b] \text{ để } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

$$\text{Suy ra } f(c).(b-a) = \int_a^b f(x) dx .$$

Định lý 1.2 Giả sử:

- i. $f(x); g(x)$ khả tích trên đoạn $[a; b]$.
- ii. $\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M$.
- iii. $g(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$:
 $g(x) \geq 0; (g(x) \leq 0); \forall x \in [a; b]$.

$$\text{Khi đó: } \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \alpha \int_a^b g(x) dx \text{ với } m \leq \alpha \leq M \quad (1)$$

Đặc biệt, nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq f(c) \int_a^b g(x) dx$ với $a \leq c \leq b$.

Chứng minh. Giả sử $g(x) \geq 0$. Vì $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m.g(x) \leq f(x).g(x) \leq M.g(x)$.

Do đó, ta có:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (2)$$

Mặt khác, do $g(x) \geq 0; \forall x \in [a; b]$ nên $\int_a^b g(x)dx \geq 0$.

Nếu $\int_a^b g(x)dx = 0$ thì từ (2) ta có: $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Trong trường hợp này (1) luôn đúng.

Nếu $\int_a^b g(x)dx > 0$. Đặt: $\alpha = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Khi đó: $\alpha \in [m; M]$ và ta có (1).

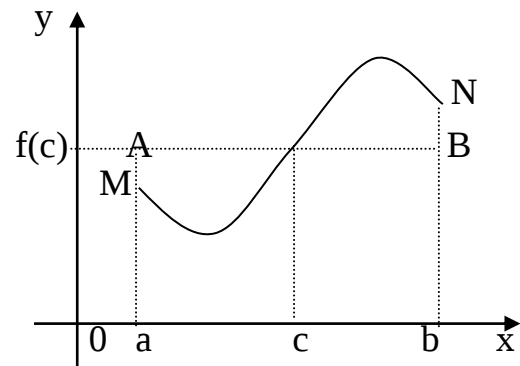
Đặc biệt, khi $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ trở về định lý (1), ta có:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(c) \int_a^b g(x)dx \text{ với } a \leq c \leq b.$$

Ý nghĩa hình học của định lý về giá trị trung bình

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; $f(x) \geq 0$; $\forall x \in [a; b]$. Ta luôn tìm được ít nhất điểm $c \in [a; b]$; sao cho diện tích hình thang cong $aMNB$ bằng diện tích hình chữ nhật $aABb$ (Hình 1.3).

Khi đó $f(c)$ gọi là giá trị trung bình của $f(x)$ trên $[a, b]$.



Hình 1.3

1.3.2.2 Định lý đạo hàm của tích phân theo cận trên

Định lý 1.3 Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì hàm $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ với $a \leq x \leq b$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$. Tức là:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x) \text{ với } x \in [a; b]. \quad (3)$$

Chứng minh. a. Khi $x \in (a; b)$ cho x số gia Δx sao cho $x + \Delta x \in [a; b]$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \end{aligned}$$

Theo định lý về giá trị trung bình tồn tại c nằm giữa x và $x + \Delta x$ sao cho:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)(\Delta x) \Rightarrow \Delta \Phi = f(c)(\Delta x)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(c) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c).$$

Vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên $f(x)$ liên tục tại $x \in (a; b)$.

Suy ra, khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì $f(c) \rightarrow f(x)$ do c nằm giữa x và $x + \Delta x$. Do đó

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(x) \text{ hay } \Phi'(x) = f(x).$$

b. Khi $x = a$ hoặc $x = b$; chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\Phi'(a+0) = f(a); \quad \Phi'(b-0) = f(b).$$

Vậy

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ với } \forall x \in [a; b].$$

Hệ quả. Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

1.3.2.3 Định lý mở rộng (Đạo hàm theo cận tích phân):

Định lý 1.4 Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $U(x); V(x)$ là hai hàm số khả vi liên tục nhận giá trị trên $[a; b]$ thì:

$$\left[\int_{U(x)}^{V(x)} f(t) dt \right]' = f[V(x)]V'(x) - f[U(x)]U'(x). \quad (2)$$

Ví dụ 1.2 a. Cho $\Phi(x) = \int_{\sin x}^{\frac{1}{x}} \cos(t^2) dt$. Tìm $\Phi'(x)$.

Giải. Đặt: $U(x) = \sin x \Rightarrow U'(x) = \cos x$; $V(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow V'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f(t) = \cos(t^2) &\Rightarrow f[U(x)] = \cos(\sin^2 x); \\ &\Rightarrow f[V(x)] = \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2. \end{aligned}$$

Từ công thức (2) suy ra:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - \cos(\sin^2 x)(\sin x)' \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \cos x \cdot \cos(\sin^2 x) \end{aligned}$$

b. Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$ (có dạng $\frac{0}{0}$).

Giải. Áp dụng quy tắc L' Hopitale ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x \cos(t^2) dt \right)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1. \end{aligned}$$

1.4 CÔNG THỨC NEWTON - LEPNIT

Định lý 1.5 Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ có $F(x)$ là nguyên hàm thì

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ký hiệu:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Chứng minh. Vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên theo định lý đạo hàm theo cận trên,

ta có
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ với } a \leq x \leq b.$$

cũng là nguyên hàm của $f(x)$; theo định lý về nguyên hàm ta có:

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

hay
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Cho $x = a$, ta được
$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Leftrightarrow 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a).$$

Cho $x = b$, ta được
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Ví dụ 1.3 Tính
$$\int_1^2 (2x + x^3)dx.$$

Ta có:
$$\int (2x + x^3)dx = x^2 + \frac{x^4}{4} + C$$

Suy ra
$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x + x^3)dx &= \left(x^2 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(2^2 + \frac{2^4}{4} \right) - \left(1^2 + \frac{1^4}{4} \right) = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Vậy
$$\int_1^2 (2x + x^3)dx = \frac{27}{4}.$$

Bài 2

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Định lý 2.1 Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Giả sử phép đổi biến $x = \varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện:

- $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$ với $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$.
- Khi t biến thiên trên $[\alpha; \beta]$ thì x biến thiên trên $[a,b]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (3)$$

Chứng minh. Do các hàm f và φ liên tục nên ta có thể dùng công thức Newton-Leibnitz. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $\Phi(t)$ là nguyên hàm của $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{và} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt &= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \\ &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) cho ta: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

Chú ý. i. Khi đổi biến ta nhớ đổi cận.

ii. Công thức đổi biến (3) thuận lợi ở chỗ là sau khi đổi biến không cần quay về biến cũ.

Ví dụ 2.1 Tính các tích phân sau:

$$\text{a. } I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad (a > 0); \quad \text{b. } J = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Giải. a. Ta thấy rằng hàm dưới dấu tích phân là phương trình của đường tròn. Tích phân cần tính là diện tích $\frac{1}{4}$ đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ ứng với $x > 0$; $y > 0$.

Đặt $x = a \cdot \sin t \Rightarrow dx = a \cdot \cos t \cdot dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy} \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}.$$

b. Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = \pi$; $x = \pi \Rightarrow t = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } J &= \int_{\pi}^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t} (-dt) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \cdot \sin t}{1+\cos^2 t} dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1+\cos^2 x} dx.\end{aligned}$$

(tích phân xác định không phụ thuộc vào biến lấy tích phân). Suy ra:

$$\begin{aligned}2J &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{-d(\cos t)}{1+\cos^2 t} \\ &= -\pi \cdot \arctg \cdot \cos t \Big|_0^{\pi} \\ &= -\pi [\arctg(\cos \pi) - \arctg(\cos 0)] \\ &= -\pi [\arctg(-1) - \arctg(1)] \\ &= -\pi \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Vậy
$$J = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ví dụ 2.2 Chứng minh rằng nếu liên tục trên $[-a; a]$ thì:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ khi } f(x) \text{ lẻ} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & , \text{ khi } f(x) \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Giải. Trước hết ta thấy trên $[-a; a]$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Theo mục 2 phần 2.4, ta có:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (*).$$

Trong tích phân thứ nhất ở vế phải của (*) ta đổi biến $x=-t$. Khi đó:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x) dx.$$

Do tích phân xác định không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a [f(x) - f(-x)] dx.\end{aligned}$$

Dùng tính chất chẵn, lẻ của hàm số, ta có:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ khi } f(x) \text{ lẻ} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & , \text{ khi } f(x) \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Định lý 2.2 Xét tích phân $\int_a^b f(x) dx$ với $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Giả sử phép đổi biến $t = \varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

- i. $\varphi(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$.

ii. $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$ với $g(t)$ là hàm liên tục trên $[\varphi(a); \varphi(b)]$.
 Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

Chứng minh. Giả sử $\int g(t)dt = F(t) + C$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$$

Vì vậy:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= F[\varphi(x)]_a^b \\ &= F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] \\ &= F(t)_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.3 a. Tính tích phân: $I = \int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$.

Giải. Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow 2udu = dx$; $x = u^2 - 1$.

Khi $x = 1 \Rightarrow u(1) = \sqrt{2}$; khi $x = 3 \Rightarrow u(3) = \sqrt{4} = 2$. Suy ra:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{u}{u^2 - 1} \cdot 2u \cdot du = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2u^2}{u^2 - 1} du \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 2du + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2du}{u^2 - 1} \\ &= 2u \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^2 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} + \ln \left(\frac{1}{3} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right). \end{aligned}$$

b. Tính tích phân: $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$; $(0 < \alpha < \pi)$.

Giải. Vì $\alpha \in (0; \pi)$ nên $f(x) = \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$ liên tục trên $[-1; 1]$.

Đặt $t = \pi - \cos \alpha$; ta thấy t đơn điệu trên $[-1; 1]$. Khi đó:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1-\cos \alpha}^{1-\cos \alpha} \frac{dt}{t^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sin \alpha} \right) \Big|_{-1-\cos \alpha}^{1-\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-(1+\cos \alpha)}{\sin \alpha} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

Chú ý. Khi sử dụng định lý này, ta cần lưu ý rằng hàm $t = \varphi(x)$ phải đơn điệu trên $[a; b]$

Vì trái lại thì có thể $\varphi(a) = \varphi(b)$. Khi $a \neq b$, lúc đó tích phân ở vế phải bằng 0; còn tích phân ở phía trái có thể khác 0.

Ví dụ 2.4 Cho $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$.

Biến đổi lượng giác (công thức hạ bậc) cho $I = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}$ (kết quả đúng).

Nếu biến đổi (một cách hình thức) $t = \sin x$, không chú ý $\varphi(x) = \sin x$ không đơn điệu trên $[0; \pi]$, ta thấy các cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \pi \Rightarrow t = 0$, khi chuyển tích phân theo t , ta được $I = 0$. Muốn tránh trường hợp này, trước khi đổi biến $t = \sin x$, ta phải tách đoạn tích phân thành hai đoạn mà trên hai đoạn này $t = \sin x$ đơn điệu. Cụ thể:

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.2 PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Định lý 2.3 Nếu các hàm $u(x)$; $v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ thì:

$$\int_a^b u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x) dx.$$

$$\text{Viết tắt: } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Chứng minh. Vì $u(x).v(x)$ là nguyên hàm của $u(x).v'(x) + v(x).u'(x)$. Vì thế

$$\int_a^b [u(x).v'(x) + v(x).u'(x)] dx = u(b).v(b) - u(a).v(a) = u(x).v(x) \Big|_a^b.$$

$$\text{Suy ra: } \int_a^b u(x).v'(x) dx = u(x).v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x) dx.$$

Do $v'(x) dx = dv$; $u'(x) dx = du$ và để viết cho gọn, ta có:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Ví dụ 2.5 Tính các tích phân:

$$\text{a. } \int_0^{2\pi} x \cos x dx; \quad \text{b. } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Giải. a. Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$. Khi đó:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 0.$$

$$\text{Vậy } \int_0^{2\pi} x \cos x dx = 0.$$

$$\text{b. Ta có: } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1)\cos x \cdot \sin^{n-2} x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I_n &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right] \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

Suy ra: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}; \forall n \geq 2.$

Công thức truy hồi này cho phép tính I_n thông qua $I_0; I_1$.

Nếu n chẵn ta sẽ có được $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$

Nếu n lẻ ta sẽ có được $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Quy ước: $1.3.5.....(2n+1) = (2n+1)!!$;
 $2.4.6.....(2n) = (2n)!! = 2^n \cdot n!.$

Lần lượt tính cho các I_n , ta thiết lập được công thức:

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{khi } n \text{ chẵn} \\ \frac{(n-1)!!}{n}, & \text{khi } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Ví dụ 2.6 Tính các tích phân sau:

a. $I = \int_0^1 \arctg x dx;$

b. $J = \int_0^e \ln x dx;$

c. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$

Giải. a. Đặt $\begin{cases} u = \arctg x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= x \cdot \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= \arctg(1) - \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

b. Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} J &= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e dx. \\ &= e \cdot \ln e - (e - 1) = e - e + 1 = 1 \end{aligned}$$

c. Đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Khi đó

$$K = [e^x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x \cdot dx.$$

Đặt

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x \cdot dx.$$

Để tính L ta đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} L &= -[e^x \cdot \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx \\ &= -[e^x \cdot \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + K \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } K = [e^x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cdot \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - K.$$

Hay

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} [e^x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} [e^x \cdot \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Vậy

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right).$$

Bài 3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

3.1 TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI I (TÍCH PHÂN VỚI CẬN VÔ HẠN)

Định nghĩa 3.1

i/ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên đoạn $[a, b]$, $\forall b > a$.

$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x).dx$ được gọi là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $[a, +\infty)$.

Ký hiệu $\int_a^{+\infty} f(x).dx$.

Như vậy $\int_a^{+\infty} f(x).dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x).dx$.

Chú ý 3.1

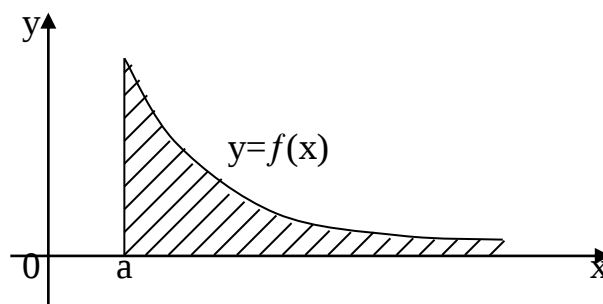
- Nếu giới hạn ở về phải tồn tại hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng trên hội tụ.
- Nếu giới hạn ở về phải không tồn tại hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng trên phân kỳ

Ý nghĩa hình học:

Về mặt hình học, (với $f(x) \geq 0$)

tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x).dx$ là

diện tích hình thang cong vô hạn (Hình 3.1).



Hình 3.1

ii) Tương tự, tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; a]$ là:

$$\int_{-\infty}^a f(x).dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x).dx.$$

Định nghĩa 3.2

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(-\infty; +\infty)$ khả tích trên $[a, b]$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tích phân suy rộng của $f(x)$ trong $(-\infty; +\infty)$ được ký hiệu và xác định như sau:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \int_{-\infty}^c f(x).dx + \int_c^{+\infty} f(x).dx; \text{ với } \forall c \in \mathbb{R}.$$

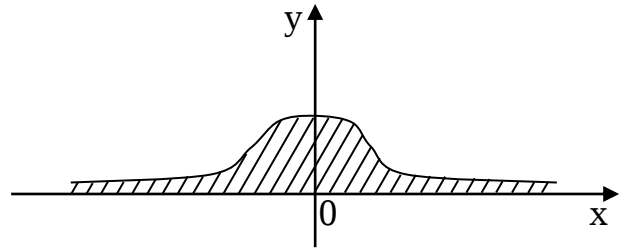
Chú ý 3.2

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$ được gọi là hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở về phải hội tụ.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$ được gọi là phân kỳ nếu có tích phân suy rộng nào đó ở về phải phân kỳ.

Ý nghĩa hình học:

Về mặt hình học, với $f(x) \geq 0$ tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ là diện tích hình thang cong vô hạn (Hình 3.2)



Hình 3.2

Ví dụ 3.1 1) Tính các tích phân suy rộng sau đây:

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} \quad \text{b) } \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x+3}$$

Giải: a)

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^b \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x+3} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 \frac{dx}{x+3} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\ln|x+3| \Big|_a^1 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\ln 4 - \ln|a+3|) = -\infty. \end{aligned}$$

2) Tính các tích phân suy rộng sau:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx$$

Giải: a) Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \\ I &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \left(\arctg x \Big|_c^0 \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg c) \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} (-\arctg c) = -\left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$I_2 = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

b)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx \end{aligned}$$

Đặt

$$u = x^2 + 2 \Rightarrow du = 2xdx; x = a \Rightarrow u = a^2 + 2;$$

Ta có

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow u = 2; \\ x = b &\Rightarrow u = b^2 + 2. \end{aligned}$$

$$\int_a^0 \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx = \int_{a^2+2}^2 \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{u} \Big|_{a^2+2}^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{a^2+2}.$$

và

$$\int_0^b \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx = \int_2^{b^2+2} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{u} \Big|_2^{b^2+2} = -\frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{(x^2 + 2)^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{a^2+2} \right) \\ &= + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Vậy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} dx = 0.$$

3) Xét sự hội tụ của $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ($a > 0; \alpha > 0$)

Giải: Ta có

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^x & \text{khi } \alpha \neq 1 \\ \ln t \Big|_a^x & \text{khi } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) & \text{khi } \alpha \neq 1 \\ \ln \frac{x}{a} & \text{khi } \alpha = 1 \end{cases}$$

+ Khi $\alpha = 1$. Ta có

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{a} \Rightarrow \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} \text{ phân kỳ.}$$

+ Khi $\alpha \neq 1$. Ta có

- Với $\alpha > 1$ thì

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)a^{1-\alpha}} \text{ hữu hạn} \end{aligned}$$

Suy ra $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ.

- Với $\alpha < 1$ thì ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \infty$

Suy ra $\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$ phân kỳ.

Vậy tích phân suy rộng: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ về $\frac{1}{(1-\alpha)a^{1-\alpha}}$ khi $\alpha > 1$; và phân kỳ khi $\alpha < 1$.

Chú ý 3.3

i) Đây là một tích phân suy rộng thường được dùng để xét sự hội tụ hay phân kỳ của các tích phân suy rộng khác.

ii) Các tích phân suy rộng $\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}$ và $\int_a^0 \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi $0 < \alpha < 1$ và phân kỳ khi

$\alpha \geq 1$.

3.2 TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI II (TÍCH PHÂN SUY RỘNG VỚI CẬN HỮU HẠN) (Hàm số không bị chặn trong đoạn tích phân)

Định nghĩa 3.3 Ta nói hàm số $f(x)$ không giới nội khi $x \rightarrow b$ nếu tồn tại dãy số $\{x_n\}$ sao cho $x_n \rightarrow b$ và $f(x_n) \rightarrow \infty$.

Tương tự, ta định nghĩa hàm số $f(x)$ không giới nội khi $x \rightarrow b + 0$; ($x \rightarrow b - 0$).

Định nghĩa 3.4 i) Cho hàm số $f(x)$ xác định trong $[a, b)$ và có $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$.

Nghĩa là $f(x)$ không giới nội khi $x \rightarrow b - 0$. Khi đó:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \text{ gọi là tích phân suy rộng của } f(x) \text{ trên } [a, b).$$

Ký hiệu $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (1)$$

Chú ý 3.4

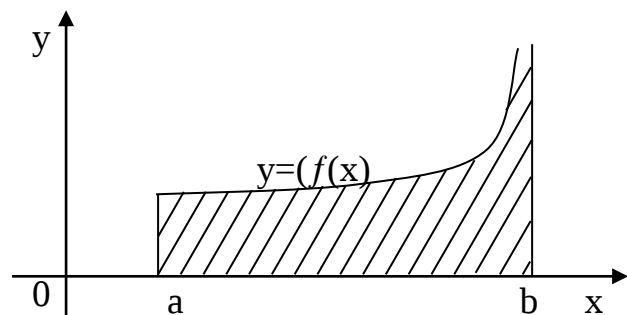
+ Nếu giới hạn ở vế phải của (1) tồn tại hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng này hội tụ và f khả tích trên $[a, b]$. Nếu không tồn tại hoặc tồn tại vô hạn ta nói tích phân suy rộng đó phân kỳ trên đoạn $[a, b]$.

+ Giả sử hàm $f(x)$ không bị chặn trong $[a, b] \in \mathbb{R}$.

Ta xét $f(x)$ bị chặn trên mọi đoạn $[a, b - \varepsilon]$ với $\forall \varepsilon > 0$; $\varepsilon \in (0; b-a)$, nhưng không bị chặn trên $[b - \varepsilon; b]$. Khi đó, b gọi là điểm bất thường.

Ý nghĩa hình học:

Về mặt hình học, (với $f(x) \geq 0$) tích phân suy rộng $\int_a^b f(x) dx$ ở trên là diện



Hình 3.3

tích hình thang cong vô hạn (Hình 3.3)

ii) Tương tự, cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a, b]$ không giới nội khi $x \rightarrow a+0$ (Tức là $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$).

Khi đó $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ gọi là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $(a, b]$.

Ký hiệu $\int_a^b f(x) dx$.

Vậy
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (2)$$

Định nghĩa 3.5 Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, x_0) \cup ((x_0, b]$ và không giới nội khi $x \rightarrow x_0$ (Tức là $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$).

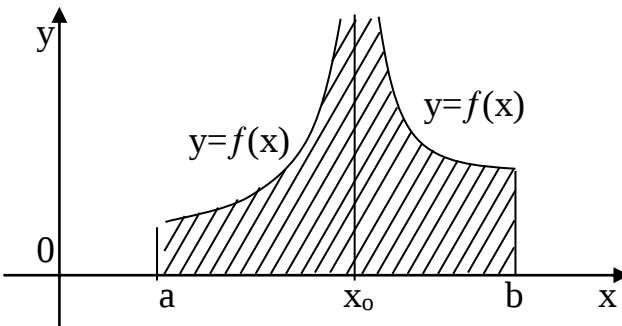
Khi đó
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \end{aligned} \quad (3)$$

Chú ý 3.5 Ta nói tích phân suy rộng này là hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở về phải hội tụ.

Ta nói tích phân suy rộng này là phân kỳ khi có tích phân suy rộng nào đó ở về phải phân kỳ

Ý nghĩa hình học:

Về mặt hình học, (với $f(x) \geq 0$) tích phân suy rộng loại này là diện tích hình thang cong vô hạn (Hình 3.4).



Hình 3.4

Định nghĩa 3.6 Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$.

Khi đó
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c-\varepsilon}^b f(x)dx \quad (4); \text{ với } a < c < b. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2 1) Tính các tích phân suy rộng sau:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Giải. a)
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\ln|x-1| \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln \varepsilon - 0) = -\infty. \end{aligned}$$

Vậy tích phân suy rộng này là phân kỳ.

b)
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{2x} \Big|_{\varepsilon}^1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2 \end{aligned}$$

Vậy tích phân suy rộng này hội tụ.

2) Tính tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Giải. Điểm $x = 1$ là điểm bất thường của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ trên đoạn tích phân.

Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bị chặn và khả tích trên mọi đoạn $[0; 1-\varepsilon]$.

Ta có
$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0$$

Do đó
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) \\ &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3) Xét sự hội tụ của tích phân: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$; ($b > a$; $\alpha > 0$).

Giải. Ta có:
$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} [(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}]; & \text{khi } \alpha \neq 1 \\ \ln(b-a) - \ln \varepsilon; & \text{khi } \alpha = 1 \end{cases}$$

□ Khi $\alpha \neq 1$. Ta có:

Với $\alpha > 1$:
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}].$$

Do đó $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ phân kỳ.

Với $\alpha < 1$:
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}] = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Do đó $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ hội tụ.

□ Khi $\alpha = 1$. Ta có

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(b-a) - \ln \varepsilon] = \infty.$$

Do đó $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ phân kỳ.

Vậy $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha < 1$ và phân kỳ khi $\alpha > 1$.

3.3 CÁC ĐỊNH LÝ SO SÁNH CỦA TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Định lý 3.1 Giả sử $f(x)$; $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$; $\forall b > a$ và $\forall x \in [a; +\infty)$; $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Khi đó

i/ Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.

ii/ Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Định lý 3.2 Giả sử $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$; $\forall x \geq a$ khả tích trên $[a, b]$ với $\forall b > a$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K$. Khi đó

i) Nếu $K = 0$ thì từ $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ suy ra $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ.

ii) Nếu $0 < K < +\infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.

iii) Nếu $K = +\infty$ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ suy ra $\int_a^b f(x)dx$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 3.3 1) Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5 + 2x}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Giải. a) Ta có $\frac{1}{x^5 + 2x} \leq \frac{1}{x^5}; \forall x \geq 1$.

Mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ hội tụ (Vì có: $\alpha = 5 > 1$)

Do đó, theo định lý so sánh 1, suy ra

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5 + 2x} \text{ hội tụ.}$$

b) Ta có: $\ln(1+x) > 1$ khi $x > (e-1)$.

Do đó $\frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{x}$.

Vì $\frac{1}{x} > 0$ khi $x > 1$ và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ ($\alpha = 1$) nên theo định lý so sánh 1

thì $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ là phân kỳ.

2) Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^3}} dx$

b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} \cdot \ln^\beta x} (\alpha > 0)$

Giải. a) Xét hàm không âm $f(x) = \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^3}}$ và $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (khi $x \geq 1$).

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^3}} \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} = K$.

Do đó tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ phân kỳ ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Do đó tích phân ban đầu phân kỳ theo định lý so sánh 2.

b) Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x^{1+\alpha} \cdot \ln^\beta x} \geq 0$ khi $x \geq 2$ và hàm $g(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}} \geq 0$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{x^{1+\alpha} \cdot \ln^\beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}} \ln^\beta x} = 0 \quad (\forall \beta).$$

Do $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}$ hội tụ ($1 + \frac{\alpha}{2} > 1$)

nên $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha} \cdot \ln^\beta x}$; ($\alpha > 0$) hội tụ theo so sánh 2

Chú ý 3.6 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha} \cdot \ln^\beta x}$; ($\alpha > 0$) phân kỳ theo định lý 2.

Do chọn $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\frac{\alpha}{2}}}$ là phân kỳ ($1 - \frac{\alpha}{2} < 1$).

3.4 SỰ HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI.

Định lý 3.3 Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Nếu tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ. Điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 3.4 Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Giải. Ta có

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ nhưng } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ là hội tụ theo định lý về hội tụ tuyệt đối.}$$

Chú ý 3.7

1) Thông thường đối với tích phân suy rộng loại hai, người ta thường so sánh với tích phân sau: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ (nếu a là kỳ dị); $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ (nếu b là kỳ dị). Hai tích

phân trên là hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

2) Có thể thực hiện phép đổi biến số và phép tích phân từng phần để tính các tích phân suy rộng.

Ta không đi sâu vào chi tiết mà chỉ xét vài ví dụ minh họa.

Ví dụ 3.5 a) Tính $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

Nhận thấy rằng I có 2 điểm bất thường $x = a, x = b$.

Thực hiện đổi biến số: $x - a \cos^2 t + b \sin^2 t$ ta chuyển I về dạng tích phân thông thường:

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} dt = \pi.$$

b) Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

Lấy tích phân từng phần, ta được:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ là hội tụ và $\frac{\sin x}{x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{-\sin 1}{1}$ là hữu hạn.

Vậy tích phân đã cho hội tụ.

3) Tích phân với cận vô hạn $I = \int_a^{\infty} f(x) dx$ luôn có thể đổi biến để đưa về tích phân với cận hữu hạn (suy rộng thông thường); Chẳng hạn $a > 0$, đổi biến $\frac{1}{x}$.

Khi đó

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{a}} f(t) \frac{dt}{t^2}.$$

Ngược lại, tích phân suy rộng $\int_a^b f(x) dx$ với b là điểm bất thường duy nhất, ta có thể đưa về tích phân suy rộng với cận vô hạn. Chẳng hạn thực hiện phép đổi đổi biến.

Đặt $x = b - \frac{1}{t}$, ta được $\int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$ là một tích phân suy rộng có cận vô hạn.

3.5 CÔNG THỨC NEWTON-LEIBNITZ

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; +\infty)$.

Ký hiệu $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = F(\infty)$.

Khi đó

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(a).$$

Ví dụ 3.6 Xét sự hội tụ và tính tích phân (trường hợp hội tụ) của các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ b) $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

Giải. a) Ta có $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$.

Theo công thức Newton-Leibnitz, ta được:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(+\infty) - \arctg(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tích phân I hội tụ và giá trị của nó là: $\frac{\pi}{2}$

b) Ta có $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = F(x).$

Vậy $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = F(+\infty) - F(-\infty) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

Bài 4

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.1 Tính diện tích hình phẳng.

a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$; $y = g(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ (Hình 4.1) được tính theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong cho theo phương trình tham số:

$x = x(t)$; $y = y(t)$ và các đường $x = a$; $x = b$, trục Ox được tính theo công thức:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t) \cdot x'(t)| dt.$$

Với $a = x(t_1)$; $b = x(t_2)$; $x(t)$; $x'(t)$; $y(t)$ liên tục trên $[t_1; t_2]$.

c. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = f(x)$ và trục Ox trên nửa đoạn $[a; +\infty)$ (Hình 4.2) được tính theo công thức:

$$S = \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Chú ý 3.1

1. Nếu phương trình đường cong cho dưới dạng $x = \varphi(y)$; $\varphi(y)$ liên tục trên

$[c; d]$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$x = \varphi(y)$; $y = c$; $y = d$; Oy được tính theo công thức:

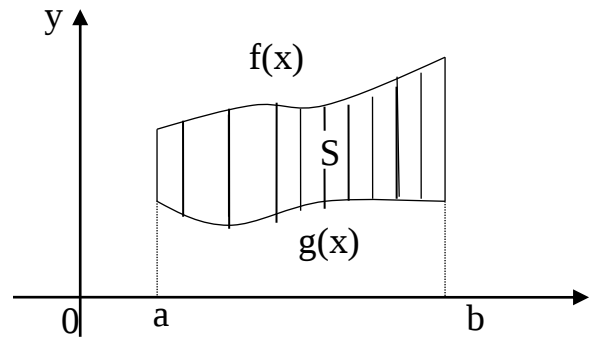
$$S = \int_c^d |\varphi(y)| dy.$$

2. Trong hệ tọa độ cực, diện tích hình quạt cong giới hạn bởi cung $\widehat{AB}$ của đường cong $r = r(\varphi)$ liên tục $[\alpha; \beta]$, với hai tia $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$ (Hình 4.3) được cho bởi công thức:

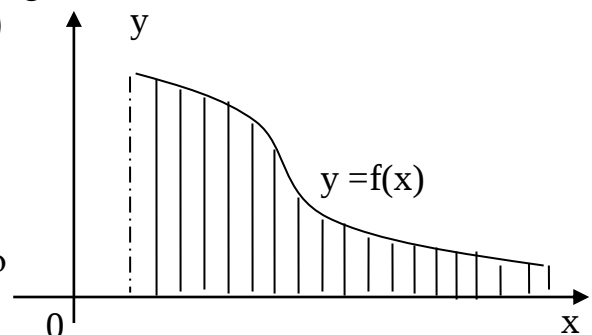
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

4.2 Độ dài đường cong phẳng.

a. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$, gọi cung $\widehat{AB}$ là đồ thị của $f(x)$, $x \in [a; b]$. Ta định nghĩa độ dài s của cung $\widehat{AB}$ và tính s .



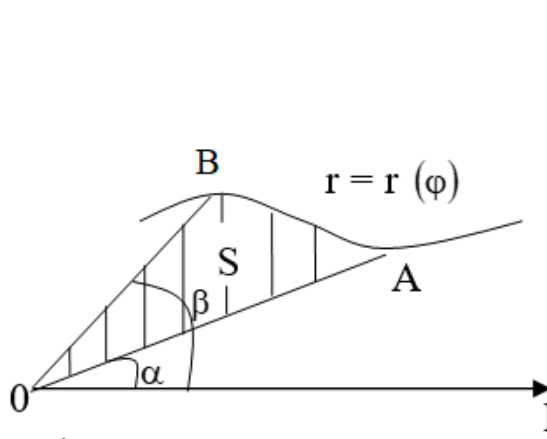
Hình 4.1



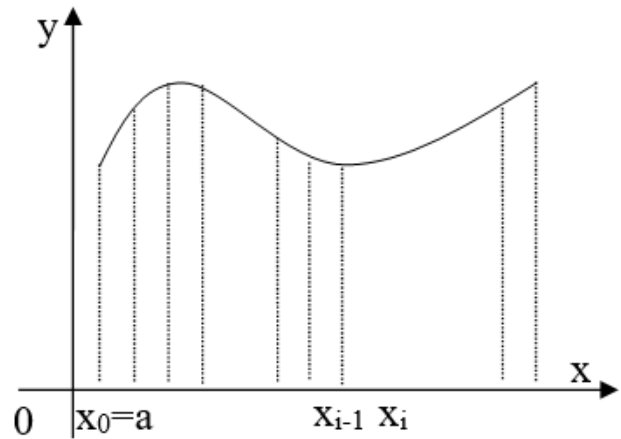
Hình 4.2

Trên cung $\widehat{AB}$ lấy những điểm: $M_0(x_0; f(x_0)), \dots, M_i(x_i; f(x_i)), \dots, M_n(x_n; f(x_n))$ với $x_0 = a; x_n = b$ (Hình 4.4).

Ta gọi độ dài s của cung $\widehat{AB}$ là giới hạn của đường gấp khúc $M_0M_1\dots M_n$ khi số cạnh của đường gấp khúc tăng vô hạn sao cho độ dài cạnh lớn nhất của nó dần tới 0, nghĩa là:



Hình 4.3



Hình 4.4

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_{i-1}M_i.$$

Trong đó

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} M_{i-1}M_i.$$

Hiển nhiên ta có

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

với

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \Delta y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Theo công thức Lagrange ta có

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i, \text{ với } x_{i-1} \leq c_i \leq x_i.$$

Do đó

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i.$$

Suy ra

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i.$$

Vì $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ liên tục với $x \in [a; b]$ nên hàm số $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ khả tích trên $[a; b]$.

Do đó luôn tồn tại độ dài s , và theo định nghĩa tích phân xác định, ta có

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (1)$$

Vậy độ dài cung $\widehat{AB}$ được tính theo công thức

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

b. Nếu đường cong cho dưới dạng tham số

$$x = x(t); y = y(t); t \in [\alpha; \beta]$$

thì từ (1) chỉ cần thay dx bởi:

$$x'(t)dt; f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Ta có công thức

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

c. Trường hợp đường cong cho trong hệ tọa độ cực

$r = r(\varphi); \varphi \in [\alpha; \beta]$. Vì:

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \cdot \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(\varphi) = r'(\varphi) \cdot \cos \varphi - r(\varphi) \cdot \sin \varphi \\ y'(\varphi) = r'(\varphi) \cdot \sin \varphi + r(\varphi) \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

Suy ra

$$[x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2 = [r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2.$$

Vậy

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} \cdot d\varphi.$$

Chú ý 4.2

- (1) Nếu s là độ dài cung $\widehat{AM}$, và đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục cùng với đạo hàm $f'(x)$; trong đó $A(a; f(a))$ là một điểm cố định và $M(x; f(x))$, ta có:

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} \cdot dt.$$

Từ đó suy ra $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, (đạo hàm theo cận trên).

hay $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$. Đây là công thức vi phân cung.

Công thức trên cũng có thể viết dưới dạng:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

hoặc $(ds)^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 (dt)^2$.

- (2) Trong tọa độ cực, công thức vi phân cung có dạng:

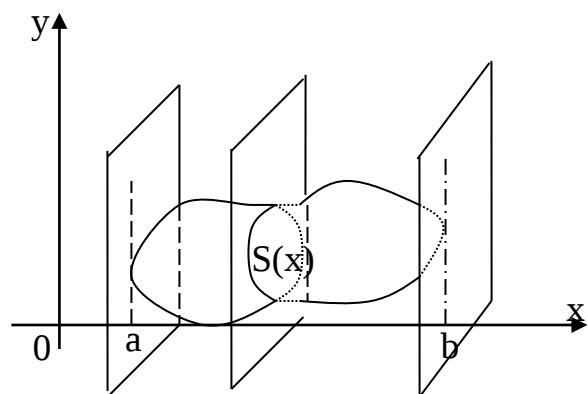
$$ds = \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} \cdot d\varphi.$$

4.3 Tính thể tích vật thể

4.3.1 Vật thể bất kỳ

Thể tích vật thể hữu hạn giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a; x = b$, có thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x , $a \leq x \leq b$ (Hình 4.5) là $S(x)$ liên tục trên $[a; b]$ được tính theo công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



Hình 4.5

4.3.2 Vật thể tròn xoay

Thể tích vật thể tròn xoay do hình thang cong giới hạn bởi đường cong $x = a, x = b$, $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, trục Ox (Hình 4.6) quay quanh trục Ox được tính theo công thức:

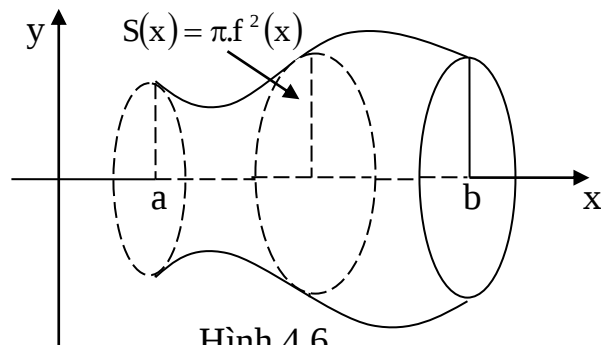
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Ở đây: $S(x) = \pi[f(x)]^2$.

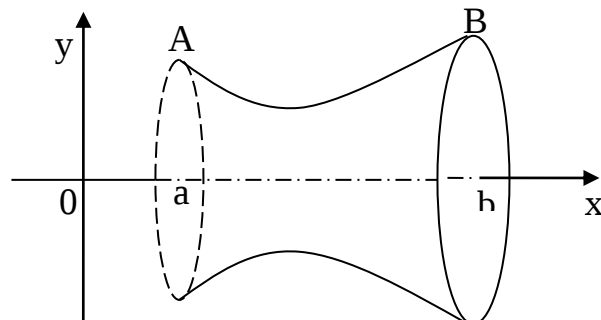
4.3.3 Tính diện tích mặt tròn xoay

Xét cung $\widehat{AB}$, đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ với $f(x)$; $f'(x)$ liên tục trên $[a; b]$,

Cho cung $\widehat{AB}$, quay quanh trục Ox tạo thành mặt tròn xoay (Hình 4.7).



Hình 4.6



Hình 4.7

Khi đó, diện tích của mặt tròn xoay này được tính theo công thức:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} . dx .$$

Chú ý 4.3

1) Nếu vật thể tròn xoay có được do đường cong $x = \varphi(y)$; $\varphi(y)$ liên tục trên $[c; d]$, $y = c$; $y = d$, trục Oy thì thể tích là:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy .$$

2) Tương tự diện tích mặt tròn xoay là:

$$S = 2\pi \int_c^d |\varphi(y)| \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} . dy .$$

Ví dụ 4.1 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = x^2; y = \frac{x^2}{2}; y = 2x \text{ (Hình 4.8).}$$

Giải.

Diện tích của hình phẳng cần tìm là:

$$S = S_1 + S_2$$

$$\text{Với } S_1 = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left. \frac{x^3}{6} \right|_0^2 = \frac{4}{3};$$

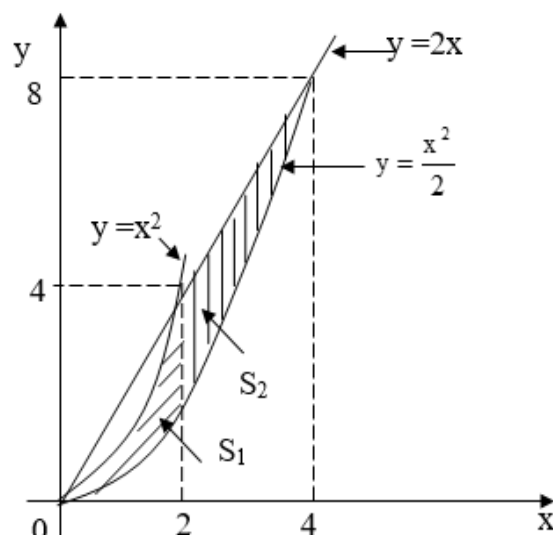
$$S_2 = \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_2^4 = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Vậy } S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 4.2

Tính diện tích của Elíp (Hình 4.9)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hoặc}$$



Hình 4.8

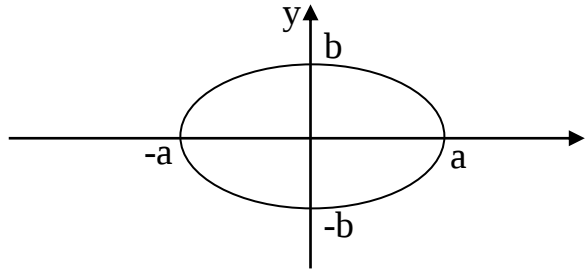
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}; 0 \leq t < 2\pi.$$

Giải.

Vì sự đối xứng của Elip nên diện tích của Elip được tính theo công thức:

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= 4 \left(\frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) \Big|_0^a = \pi ab$$



Hình 4.9

Nếu dùng công thức tính diện tích với Elip cho dưới dạng tham số ta được:

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin^2 t \cdot dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \pi ab.$$

Ví dụ 4.3 Tính diện tích hình giới hạn bởi đường Cycloide (Xyclôit):

$x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); (0 \leq t < 2\pi)$ và trục Ox (Hình 4.10).

Giải.

Ta có công thức:

$$S = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt$$

$$a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4 \sin 2t} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi a^2 \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 4.4 Tính diện tích giới hạn bởi đường hình tim $r = a(1 + \cos \varphi); a > 0$ cho trong tọa độ cực (Hình 4.11).

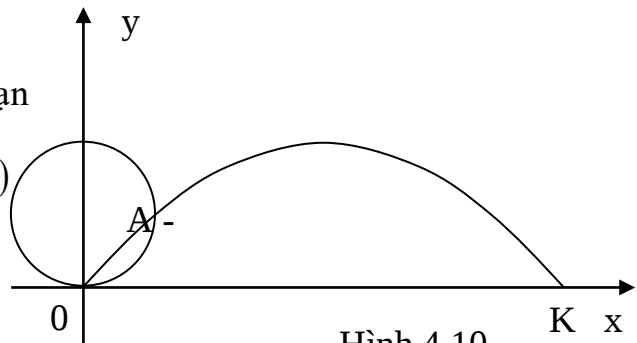
Giải. Ta có

$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi \right)$$

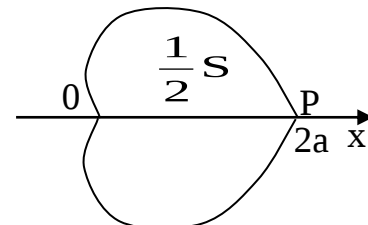
$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ (đvdt).}$$



Hình 4.10



Hình 4.11

Ví dụ 4.5 Tính độ dài d của đường cong $y = \ln x$ từ điểm có hoành độ $x_1 = \sqrt{3}$ đến điểm có hoành độ $x_2 = \sqrt{8}$ (Hình 4.12).

Giải. Áp dụng công thức tính độ dài cung phẳng $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ ta có độ dài cung AB đã cho là:

$$\begin{aligned} d &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + [\ln'(x)]^2} dx \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx \end{aligned}$$

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2udu = 2xdx; x^2 = u^2 - 1;$
 $x = \sqrt{3} \Rightarrow u = 2; x = \sqrt{8} \Rightarrow u = 3.$

Vậy

$$\begin{aligned} d &= \int_2^3 \frac{u \cdot u \cdot du}{u^2 - 1} = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du \\ &= \left(u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}, \text{ (đvđ)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4.6 Tính độ cung của Parabol $y = \frac{1}{2p} x^2; p > 0$ lấy từ gốc toạ độ đến điểm M có hoành độ x .

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dt = \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{t^2 + p^2} dt \\ &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} t \sqrt{t^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + p^2}) \right] \Big|_0^x \\ &= \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4.7 Tính độ dài của Xycloide:

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

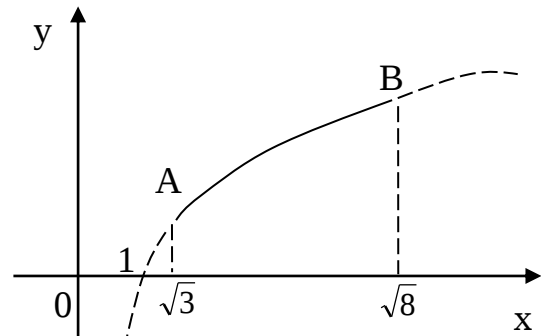
Giải. Ta có:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

Ví dụ 4.8 Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^2; y = \sqrt{x}$ quay quanh trục Ox (Hình 4.13).

Giải. Thể tích của vật thể đã cho là: $V = V_1 - V_2$

Với V_1 là vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}; x = 1$, trục Ox ; quay quanh Ox :



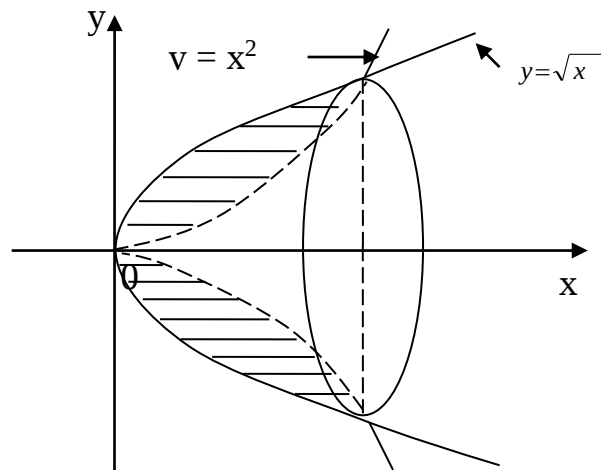
Hình 4.12

$$V_1 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

và V_2 do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $x = 1$ và trục Ox ; quay quanh Ox :

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Vậy $V = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$ (đvtt).



Hình 4.13

Ví dụ 4.9 Tính thể tích của Elipxôit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Giải. Cắt Elipxôit bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , $x \in [-a; a]$ (Hình 4.14), ta được thiết diện là một Elip có phương trình:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

hay

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

Mà diện tích Elip này có giá trị:

$$\begin{aligned} S(x) &= \pi \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \\ &= \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

Do vậy thể tích V của Elipxôit là:

Mà diện tích Elip này có giá trị:

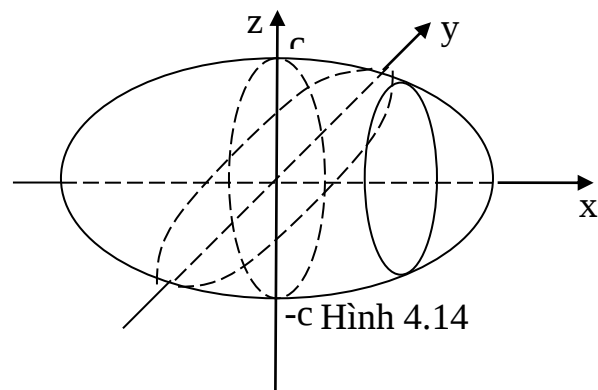
$$\begin{aligned} S(x) &= \pi \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \\ &= \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Do vậy thể tích V của Elipxôit là:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(x) dx = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{2\pi bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2\pi bc}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Ví dụ 4.10 Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi Elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Hình 4.14

khi cho Elip quay quanh trục Oy .

Giải. Ở đây $\varphi^2(y) = x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó} \quad V &= \pi \int_{-b}^b \frac{2}{b^2} (b^2 - y^2) dy \\ &= 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy \\ &= 2\pi \frac{a^2}{b^2} \left(b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b \\ &= \frac{4}{3} a^2 b. \end{aligned}$$

Vậy $V = \frac{4}{3} a^2 b$ (đvtt).

Ví dụ 4.11 Tính diện tích của vòng xuyên sinh bởi đường tròn: $x^2 + (y - b)^2 = a^2$; ($b > a$) quay quanh trục Ox (Hình 4.15)

Giải. Diện tích của vòng xuyên bằng tổng hai diện tích bởi nửa vòng tròn trên khi quay quanh Ox . Nửa vòng tròn trên có phương trình: $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$; nửa vòng tròn dưới có phương trình

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$

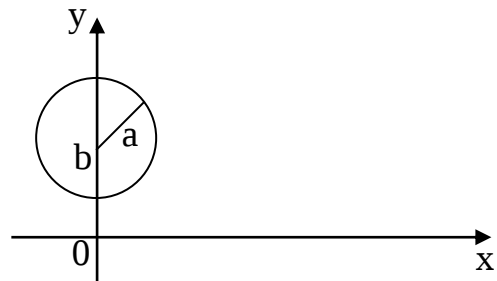
Trong cả hai trường hợp ta đều có:

$$(y')^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}.$$

Áp dụng công thức tính diện tích mặt tròn xoay, ta có:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^a \left(b + \sqrt{a^2 - x^2} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-a}^a \left(b - \sqrt{a^2 - x^2} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= 8\pi ab \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= 8\pi ab \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a. \end{aligned}$$

Vậy $S = 4\pi^2 ab$.



Hình 4.15

BÀI TẬP CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Tích phân xác định

Dùng định nghĩa tích phân xác định để tính:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

Tính các tích phân:

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} \quad 4) \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{e^x - 1} \quad 5) \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos x \cdot dx \quad 6) \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \cdot dx$$

Áp dụng định lý trung bình, so sánh các tích phân:

$$7) I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx; I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad 8) I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x \cdot dx; I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x \cdot dx$$

Dùng đạo hàm theo cận trên, tính $I'(x)$ nếu:

$$9) I(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt \quad 10) \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t \cdot dt$$

Tìm:

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{t} \cdot dt}{\int_0^{\tg x} \sqrt{\sin t} \cdot dt}$$

Dùng công thức Newton - Leibnitz, tính các tích phân:

$$13) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + 4}} \quad 14) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \quad 15) \int_0^2 |1 - x| dx$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, tính các tích phân:

$$16) \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx \quad 17) \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctg x \cdot dx \quad 18) \int_0^{\pi} e^{2x} \sin 3x \cdot dx$$

Dùng phương pháp đổi biến số, tính các tích phân:

$$19) \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \quad 20) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx \quad 21) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

2. Tích phân suy rộng

Tính các tích phân suy rộng:

$$22) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} \quad 23) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} \quad 24) \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \quad 25) \int_0^1 \frac{\ln^3 x}{x} dx$$

Xét sự hội tụ của các tích phân:

$$\begin{array}{llll} 26) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 5} & 27) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^\alpha} dx & 28) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}} & 29) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx \\ 30) \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x} dx & 31) \int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx & 32) \int_1^\infty \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx & 33) \int_1^\infty \frac{1+x^2}{x^3} dx \\ 34) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1} & 35) \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x} & 36) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} & 37) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{e^{\sin x} - 1} \end{array}$$

=====

CHƯƠNG 3.

CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI HÀM

Bài 1.

CHUỖI SỐ

1.1 ĐỊNH NGHĨA

1.1.1 Định nghĩa chuỗi số

Cho dãy vô hạn các số thực $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Khi đó tổng vô hạn:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

được gọi là *chuỗi số*.

Các số $u_1, u_2, \dots$ được gọi là số hạng của chuỗi số, u_n biểu thị số hạng tổng quát của chuỗi số $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ được gọi là tổng riêng (Partial sum) thứ n của chuỗi số.

Ví dụ 1: Chuỗi số $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi số điều hoà.

1.1.2 Sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

Định nghĩa. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và S_n là tổng riêng thứ n của nó.

i) Nếu giới hạn sau tồn tại và hữu hạn : $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Ta gọi chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ về S và chuỗi (1) là chuỗi số hội tụ.

ii) Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ không tồn tại (hoặc $S_n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$) thì ta nói chuỗi số (1) phân kỳ và nó không có tổng.

Số $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ được gọi là phần dư của chuỗi số.

Ví dụ 2: Xét chuỗi số: $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0, q \neq 1$);

(*)

Đây là cấp số nhân vô hạn có công bội là q .

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

- Nếu $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, do đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}$.

Vậy, khi $|q| < 1$ thì chuỗi số trên hội tụ và tổng của nó là $S = \frac{a}{1 - q}$

- Nếu $|q| > 1$, $q^n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$, và $\frac{a - aq^n}{1 - q} \rightarrow \pm \infty$ khi $n \rightarrow \infty$, tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ không tồn tại. Vậy, khi $|q| > 1$ thì chuỗi số trên phân kỳ.

- Nếu $|q| = 1$, $S_n = a + a + \dots + a = na$, thì $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Chuỗi số trên phân kỳ.

Tóm lại, chuỗi số (*) hội tụ khi và chỉ khi $|q| < 1$.

1.2 ĐIỀU KIỆN CẦN ĐỂ CHUỖI SỐ HỘI TỤ

1.2.1 Định lý 1: Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (2)$$

Chứng minh:

Nếu chuỗi số (1) hội tụ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

Trong đó S là tổng của chuỗi số. Ta cũng có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Vậy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$$

hoặc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

Vì

$$S_n - S_{n-1} = u_n,$$

nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

1.2.2 Hệ quả: Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ (hoặc không tồn tại

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$) thì chuỗi số phân kỳ.

Chẳng hạn, chuỗi số

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

phân kỳ vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Chú ý: Định lý 1 cho ta điều kiện cần nhưng không phải là điều kiện đủ để chuỗi số hội tụ. Nghĩa là điều ngược lại chưa chắc đúng, hay cịn được pht biểu:

Nếu cĩ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ thì chưa chắc chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Thật vậy, chuỗi điều hoà $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

là chuỗi số phân kỳ, mặc dù

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Có thể chứng minh sự phân kỳ của chuỗi số điều hoà như sau:

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17} + \dots \quad (a) \end{aligned}$$

Xét chuỗi số phụ

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}\right) \quad (b) \end{aligned}$$

Kí hiệu $S_n^{(1)}$ là tổng riêng của chuỗi số điều hòa (a) và $S_n^{(2)}$ là tổng riêng của chuỗi số (b). Vì mỗi số hạng của chuỗi số (a) lớn hơn hoặc bằng mỗi số hạng tương ứng của chuỗi số (b), nên với mọi $n > 2$, ta có $S_n^{(1)} > S_n^{(2)}$ (c)

Tính tổng riêng của chuỗi số (b) đối với $n = 2^1, 2^2, 2^3, \dots$

$$S_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} ; S_4^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} ;$$

$$S_8^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

Tương tự

$$S_{16}^{(2)} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} ; S_{32}^{(2)} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}, \dots$$

Một cách tổng quát $S_{2^k}^{(2)} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$.

Vậy, đối với chuỗi số (b): $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \infty$.

Do bất đẳng thức (c), ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = \infty$, chứng tỏ chuỗi số điều hoà phân kỳ.

1.3 TÍNH CHẤT CỦA CHUỖI HỘI TỤ

1.3.1 Định lý 2: Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và tổng của nó là S thì chuỗi

số $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ cũng hội tụ và có tổng cS

1.3.2 Định lý 3: Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

1.3.3 Định lý 4: Nếu chuỗi số hội tụ thì chuỗi số thu được bằng cách cộng vào hoặc trừ đi một số hữu hạn các số hạng cũng hội tụ.

Phát biểu cách khác:

Nếu chuỗi số hội tụ thì phần dư bất kỳ của nó cũng hội tụ. Ngược lại, nếu phần dư nào đó của chuỗi số hội tụ thì chuỗi số đó cũng hội tụ.

Khi đó, ta có:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, S_m = \sum_{k=1}^m u_k, R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k$$

và $S = S_m + R_m.$

1.4 ĐIỀU KIỆN HỘI TỤ CAUCHY

1.4.1 Định lý 5 (Điều kiện cần và đủ để chuỗi số hội tụ): Để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ điều kiện cần và đủ là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $N(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n \geq N(\varepsilon)$ và số nguyên bất kỳ $p \geq 0$, bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn:

$$|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon \quad (3)$$

Từ điều kiện hội tụ Cauchy ta có thể nhận được điều kiện cần để chuỗi số hội tụ (2). Thật vậy, trong bất đẳng thức (3) ta đặt $p = 0$, ta có với mọi $n \geq N(\varepsilon)$: $|u_n| < \varepsilon$. Do $\varepsilon > 0$ là số bé tùy ý nên bất đẳng thức đó tương đương với điều kiện:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

1.5 TIÊU CHUẨN SO SÁNH ĐỐI VỚI CHUỖI SỐ DƯƠNG

1.5.1 Định lý 6 (Tiêu chuẩn so sánh 1): Cho hai chuỗi số dương

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (4)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (5)$$

và $u_n \leq v_n$ (với mọi $n=1,2,3,\dots$).

i) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

ii) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

Ví dụ 3:

1) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ, vì $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ với mọi $n > 1$.

Chuỗi số điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi số đã cho phân kỳ.

2) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ hội tụ, vì $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$ với mọi $n > 1$.

Nhưng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi số đã cho hội tụ.

3) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}$ hội tụ, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$ với mọi $n \geq 1$.

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi số đã cho hội tụ.

1.5.2 Định lý 7 (Tiêu chuẩn so sánh 2): Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, trong đó k hữu hạn và khác 0 (trường hợp đặc biệt, $k = 1$, tức là $u_n \sim v_n$) thì cả hai chuỗi số dương $\sum_{k=1}^n u_k$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ.

Ví dụ 4: Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 - 1}$ phân kỳ, vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{3n^2 - 1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$.

Chứng minh chuỗi điều hoà là phân kỳ.

Xét hiệu hai tổng riêng tương ứng S_{2n} và S_n :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ với $p = n$ chuỗi điều hoà không thoả mãn điều kiện hội tụ Cauchy, do đó nó phân kỳ.

1.6 TIÊU CHUẨN D'ALEMBERT ĐỐI VỚI CHUỖI SỐ DƯƠNG

1.6.1 Định lý 8 (Tiêu chuẩn d'Alembert): Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$,

i) Chuỗi số hội tụ nếu $l < 1$.

ii) Chuỗi số phân kỳ nếu $l > 1$. Nếu $l = 1$, không có kết luận

Ví dụ 5:

1) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Vậy, chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} n}{(n+1) 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n}{n+1} = 2 > 1$$

Vậy, chuỗi số đã cho phân kỳ.

3) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1$$

Tiêu chuẩn d'Alembert không cho ta kết luận nào cả. Tuy nhiên $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, tức là số hạng tổng quát tiến dần đến 0 khi $n \rightarrow \infty$. Do đó chuỗi số đã cho phân kỳ.

4) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

Tiêu chuẩn d'Alembert không cho ta kết luận nào cả. Tuy nhiên

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

Từ đó có thể viết lại chuỗi số dưới dạng:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

Giản ước các số hạng giống nhau, ta được biểu thức của tổng riêng $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Vậy, chuỗi số đã cho hội tụ và tổng của nó bằng 1.

1.7 TIÊU CHUẨN CAUCHY ĐỐI VỚI CHUỖI SỐ DƯƠNG

1.7.1 Định lý 9 (Tiêu chuẩn Cauchy): Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$,

$n = 1, 2, 3, \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$,

i) Chuỗi số hội tụ nếu $l < 1$.

ii) Chuỗi số phân kỳ nếu $l > 1$. Nếu $l = 1$, không có kết luận.

Ví dụ 6:

1) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

Vậy, chuỗi số đã cho hội tụ.

3) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (chuỗi số điều hoà).

Nếu dùng tiêu chuẩn Cauchy thì không thể kết luận gì được vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

(do $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0$).

Tuy nhiên, ta đã biết chuỗi số điều hoà là phân kỳ.

2) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Tiêu chuẩn Cauchy không khẳng định chuỗi đã cho hội tụ hay phân kỳ. Nhưng ta có thể thấy rằng:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}, \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}, \dots, \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

Mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ .

1.8 TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN

1.8.1 Định lý 10: Cho chuỗi số dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{6}$$

Với các số hạng giảm, tức là $u_1 \geq u_2 \geq u_3 > \dots$ và hàm $f(x)$ liên tục, giảm sao cho: $f(1) = u_1, f(2) = u_2, f(3) = u_3, \dots, f(n) = u_n$.

i) Nếu tích phân

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \tag{7}$$

hội tụ thì chuỗi số (6) hội tụ

ii) Nếu tích phân (7) phân kỳ thì chuỗi số (6) phân kỳ.

Ví dụ 7:

1) Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Ta so sánh với tích phân của hàm $f(x) = \frac{1}{x^p}$

- Nếu $p > 1$, $\int_1^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{p-1}$, tích phân hội tụ vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ.
- Nếu $p < 1$, $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$ tích phân phân kỳ vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ.
- Nếu $p = 1$, $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$ tích phân phân kỳ vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ.

1.8.2 Nhận xét: Tiêu chuẩn d'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy không cho kết luận về vấn đề hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Thật vậy,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right)^p = 1$$

1.9 CHUỖI ĐƠN DẤU

1.9.1 Định nghĩa: Chuỗi đơn dấu là chuỗi số có dạng:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \text{ (với } u_n > 0 \text{)}$$

1.9.2 Định lý Leibnitz: Cho chuỗi đơn dấu

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \text{ (với } u_n > 0 \text{)} \quad (8)$$

Nếu các số hạng giảm nghiêm ngặt, tức là $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ thì chuỗi số (8) hội tụ và tổng của nó dương và không vượt quá số hạng đầu tiên.

Ví dụ 8:

1) Xét chuỗi điều hoà đơn dấu: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn hội tụ Leibniz $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

2) Chuỗi đơn dấu: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$ cũng hội tụ theo tiêu chuẩn hội tụ Leibniz

$$1 > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \frac{1}{4!} > \dots \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

1.10 CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI VÀ NỬA HỘI TỤ

1.10.1 Định nghĩa: Chuỗi có dấu bất kỳ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (9)$$

được gọi là chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (10)$$

hội tụ.

- ♦ Nếu chuỗi (9) hội tụ nhưng chuỗi (10) phân kỳ thì chuỗi (9) được gọi là chuỗi nửa hội tụ, hoặc chuỗi không hội tụ tuyệt đối.

1.10.2 Định lý 11: Cho chuỗi có dấu bất kỳ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (9)$$

Nếu chuỗi tạo bởi các trị tuyệt đối của các số hạng của chuỗi (9) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

(10) hội tụ thì chuỗi (9) hội tụ

Ví dụ 9:

- 1) Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} \quad (a)$$

trong đó α là một số nào đó.

Ta lập song song với chuỗi đã cho hai chuỗi sau đây:

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \quad (b)$$

Và
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad (c)$$

Chuỗi (c) hội tụ. Các số hạng của chuỗi (b) tương ứng không vượt các số hạng của chuỗi (c), do đó chuỗi (b) cũng hội tụ. Từ định lý 11 suy ra chuỗi (a) cũng hội tụ và nó hội tụ tuyệt đối.

- 2) Chuỗi điều hoà đan dấu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

là chuỗi nửa hội tụ vì chuỗi các trị tuyệt đối của các số hạng của nó là chuỗi điều

hoà $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ phân kỳ.

Bài 2

CHUỖI HÀM

2.1 MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Ta gọi chuỗi hàm là chuỗi mà trong đó số hạng tổng quát là hàm của biến số x . Xét chuỗi hàm

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (1)$$

Cho đối số x những giá trị khác nhau, ta được các chuỗi số khác nhau. Các chuỗi số này có thể hội tụ có thể phân kỳ.

Tập hợp những giá trị x mà chuỗi hàm hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm đó. Rõ ràng là, trong miền hội tụ của chuỗi hàm, tổng của chuỗi là hàm số của biến số x và được ký hiệu là $S(x)$.

Ví dụ 1:

Xét chuỗi

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

chuỗi hàm này hội tụ khi biến x ở trong khoảng $(-1; 1)$, tức là tất cả x thỏa mãn điều kiện $|x| < 1$. Với mọi x trong khoảng đó, ta có:

$$S(x) = \frac{x}{1-x}$$

ta biểu thị $S_n(x)$ là tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi hàm. Nếu chuỗi này hội tụ và nếu $S(x)$ là tổng của nó, ta có: $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

trong đó $R_n(x)$ là phần dư của chuỗi (II.1)

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Với mọi x trong khoảng hội tụ của chuỗi, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x),$$

do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S(x) - S_n(x)) = 0$$

tức là phần dư $R_n(x)$ của chuỗi hàm hội tụ tiến dần đến 0 khi $n \rightarrow \infty$.

2.2 CHUỖI HÀM HỘI TỤ ĐỀU. ĐỊNH LÝ WEIERSTRASS.

2.2.1 Định nghĩa:

Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ đều trong đoạn $[a; b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$

bé tùy ý, tồn tại số nguyên dương N sao cho $n \geq N$, bất đẳng thức $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ được thỏa mãn với mọi $x \in [a; b]$

2.2.2 Định lý 1 (Định lý Weierstrass):

Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) thỏa mãn hai điều kiện:

- i) $|u_1(x)| < \alpha_1; |u_2(x)| < \alpha_2; |u_3(x)| < \alpha_3; \dots; |u_n(x)| < \alpha_n \dots$ với mọi $x \in [a; b]$
- ii) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \dots (*)$ là chuỗi dương hội tụ

thì chuỗi hàm (1) hội tụ tuyệt đối và đều với mọi $x \in [a; b]$

Chứng minh:

Biểu thị $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \dots (*)$, ta có: $S = S_n + \varepsilon_n$, trong đó S_n là tổng riêng của n số hạng đầu tiên, ε_n là phần dư của chuỗi (*).

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots$$

Vì chuỗi (*) hội tụ nên, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Đặt tổng của chuỗi (I.11) dưới dạng:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

trong đó

$$S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$$

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots$$

Từ điều kiện của định lý, ta có

$$|u_{n+1}(x)| \leq \alpha_{n+1}; |u_{n+2}(x)| \leq \alpha_{n+2}; \dots$$

Do đó $|R_n(x)| \leq \varepsilon_n$ với mọi $x \in [a; b]$.

Vì vậy $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon_n$ với mọi $x \in [a; b]$ và $\varepsilon_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Ví dụ 2:

1) Xét sự hội tụ của chuỗi hàm

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$$

Với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$, ta có: $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Ta biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ. Vậy chuỗi đang xét hội tụ tuyệt đối, đồng thời hội tụ

đều với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}, x \in [-1; 1]$$

$$\frac{x^n}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \forall x \in [-1; 1]; \forall n \geq 1$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ hội tụ (theo tiêu chuẩn tích phân). Vậy chuỗi đang xét hội tụ

tuyệt đối, đồng thời hội tụ đều với mọi $x \in [-1; 1]$.

2.3 CHUỖI HÀM LŨY THỪA

2.3.1 Định nghĩa:

Ta gọi chuỗi hàm lũy thừa là chuỗi hàm có dạng:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2)$$

trong đó các hằng số $a_0, a_1, a_2, \dots$ được gọi là các hệ số của chuỗi lũy thừa.

2.3.2 Định lý 2 (Định lý Abel):

i) Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ với trị số xác định x_0 khác không thì nó hội tụ tuyệt đối với mọi trị số x thỏa mãn bất đẳng thức $|x| < |x_0|$.

ii) Nếu chuỗi lũy thừa phân kỳ với trị số x_0' thì nó phân kỳ với mọi trị số x thỏa mãn bất đẳng thức $|x| > |x_0'|$.

Chứng minh:

i) Theo giả thiết, chuỗi số

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

hội tụ, số hạng tổng quát của nó

$a_n x_0^n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Điều đó chứng tỏ tồn tại số M dương sao cho tất cả các số hạng của chuỗi về trị số tuyệt đối nhỏ hơn M .

Ta viết lại chuỗi (2) dưới dạng:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots \quad (2')$$

và xét chuỗi các trị tuyệt đối của chuỗi đó:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2 x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (3)$$

Các số hạng của chuỗi này nhỏ hơn các số hạng tương ứng của chuỗi sau:

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (4)$$

Chuỗi (4) là chuỗi hình học. Chuỗi này hội tụ khi $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ tức là $|x| < |x_0|$.

Từ đó suy ra chuỗi (3) hội tụ. Điều này chứng tỏ chuỗi (2') hoặc chuỗi (2) hội tụ tuyệt đối.

ii) Để chứng minh phần 2 của định lý, ta đặt giả thiết: chuỗi (2) phân kỳ tại điểm xác định x_0' . Khi đó chuỗi phân kỳ tại mọi điểm x thỏa $|x| > |x_0'|$. Vì nếu ngược lại nó hội tụ tại mọi x thỏa điều kiện đó thì theo phần i) của định lý, nó hội tụ tại x_0' (vì $|x_0'| < |x|$). Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết chuỗi phân kỳ tại mọi x_0' .

Vậy chuỗi phân kỳ tại x . Định lý được chứng minh.

2.4 KHOẢNG HỘI TỤ. BÁN KÍNH HỘI TỤ CỦA CHUỖI LŨY THỪA

Định lý Abel xác định sự phân bố các điểm hội tụ hoặc phân kỳ của chuỗi lũy thừa. Thật vậy, nếu x_0 là điểm hội tụ, thì tất cả các điểm trong khoảng mở $(-|x_0|; |x_0|)$ là những điểm hội tụ tuyệt đối. Nếu x_0' là điểm phân kỳ thì nửa đường thẳng bên phải của $|x_0'|$ và nửa đường thẳng bên trái của $-|x_0'|$ chứa các điểm phân kỳ.

Những điều phân tích trên chứng tỏ rằng tồn tại số R sao cho các điểm $|x| < R$ là những điểm hội tụ tuyệt đối, và những điểm $|x| > R$ là những điểm phân kỳ.

2.4.1 Định lý 3: Tập hợp những điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa là khoảng có tâm tại điểm gốc của hệ tọa độ.

2.4.2 Định nghĩa:

Ta gọi khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là khoảng nằm giữa các điểm $-R$ và $+R$, trong đó chuỗi hội tụ, đồng thời hội tụ tuyệt đối, còn những điểm ngoài khoảng đó thì chuỗi phân kỳ.

Số R được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa. Tại hai đầu mút của khoảng hội tụ (tức là điểm $x = -R$ và $x = R$) vấn đề hội tụ hoặc phân kỳ của chuỗi được nghiên cứu riêng.

Có những chuỗi khoảng hội tụ chỉ gồm một điểm ($R = 0$), có những chuỗi khoảng hội tụ là toàn bộ trục Ox ($R = \infty$).

Ta xét phương pháp xác định hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

Lập chuỗi gồm các trị tuyệt đối của các số hạng của chuỗi (2):

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (5)$$

Để xác định sự hội tụ của chuỗi dương (5), ta áp dụng tiêu chuẩn d'Alembert.

Giả sử tồn tại giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Theo tiêu chuẩn d'Alembert, chuỗi (5) hội tụ khi $L|x| < 1$, tức là khi $|x| < 1/L$ và phân kỳ khi $L|x| > 1$ tức là khi $|x| > 1/L$.

Từ đây suy ra rằng, chuỗi (12) ở bài 1 hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 1/L$.

Nếu $|x| > 1/L$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L|x| > 1$, chuỗi (5) phân kỳ, số hạng tổng quát của nó

không dần về 0 khi $n \rightarrow \infty$. Trong khi đó số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa (2) cũng không dần về 0. Vậy chuỗi lũy thừa (2) phân kỳ.

Do đó ta đi đến kết luận rằng khoảng $(-1/L; 1/L)$ là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa (12) ở bài 1. Vậy bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là:

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (6)$$

Bằng cách tương tự, ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy để xác định khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa. Ta thu được:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (7)$$

Ví dụ 3:

1) Xác định khoảng hội tụ của chuỗi:

$$1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Áp dụng tiêu chuẩn d'Alembert, ta thu được:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x^n} \right| = |x|.$$

Chuỗi hội tụ nếu $|x| < 1$ và phân kỳ nếu $|x| > 1$.

Tiêu chuẩn d'Alembert không cho kết luận gì tại các điểm biên của khoảng $(-1; 1)$. Nhưng ta thấy rằng chuỗi phân kỳ tại các điểm $x = \pm 1$

2) Xác định khoảng hội tụ của chuỗi:

$$\frac{2x}{1} + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \dots + \frac{(2x)^n}{n} + \dots$$

Áp dụng tiêu chuẩn d'Alembert, ta thu được:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} 2x \right| = |2x|.$$

Chuỗi hội tụ nếu $|2x| < 1$ tức $|x| < \frac{1}{2}$.

Chuỗi hội tụ tại $x = \frac{1}{2}$ và phân kỳ tại $x = -\frac{1}{2}$.

3) Xác định khoảng hội tụ của chuỗi:

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Áp dụng tiêu chuẩn d'Alembert, ta thu được:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ với mọi x .

4) Chuỗi

$$1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + (nx)^n + \dots$$

phân kỳ với mọi x , trừ $x = 0$ (vì $(nx)^n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$ với mọi $x \neq 0$).

2.5 CHUỖI LŨY THỪA $(x - a)$

2.5.1 Định nghĩa: Chuỗi lũy thừa $(x - a)$ là chuỗi hàm có dạng:

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - a)^n \quad (8)$$

trong đó các hằng số $a_0, a_1, a_2, \dots$ được gọi là các hệ số của chuỗi lũy thừa.

Nếu $a = 0$ ta thu được chuỗi (12) ở bài 1, là trường hợp riêng của chuỗi (8)

Để tìm khoảng hội tụ của chuỗi (8) ta đổi biến $(x - a) = X$.

Chuỗi (8) có dạng

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n \quad (8')$$

là chuỗi lũy thừa của X .

Giải sử $(-R; R)$ là khoảng hội tụ của chuỗi (8') thì khoảng hội tụ của chuỗi (8) là

$(a - R; a + R)$. Và vì chuỗi (8') phân kỳ khi $|X| > R$ nên chuỗi (8) phân kỳ khi

$|x - a| > R$, tức là phân kỳ ngoài khoảng $(a - R; a + R)$.

Tóm lại, khoảng hội tụ của chuỗi (8) là $(a - R; a + R)$ và có tâm tại điểm a .

Ví dụ 4:

Tìm miền hội tụ của chuỗi:

$$(x-2) + (x-2)^2 + \dots + (x-2)^n + \dots$$

Đặt $(x-2) = X$ ta thu được chuỗi

$$X + X^2 + \dots + X^n + \dots$$

Chuỗi này hội tụ nếu $|X| < 1$. Do đó chuỗi đã cho hội tụ với mọi x sao cho $1 < x < 3$.

2.6 CÁC TÍNH CHẤT CỦA CHUỖI HỘI TỤ ĐỀU VÀ CHUỖI LŨY THỪA

2.6.1 Định nghĩa sự hội tụ đều:

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (*) được gọi là hội tụ đều trên khoảng $(a; b)$ nếu:

$$\begin{cases} i) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x), \text{ trong đó } S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \\ ii) \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon), \text{ thì } |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in (a; b) \end{cases}$$

2.6.2 Các tính chất của chuỗi hội tụ đều

Tính chất 1: (Tính liên tục của tổng của chuỗi)

Nếu $u_n(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$, với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ và chuỗi (*) hội tụ đều trên khoảng $(a; b)$ thì tổng $S(x) (= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))$ liên tục trên khoảng $(a; b)$.

Tính chất 2: (Lấy đạo hàm của một chuỗi)

Nếu tổng $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$; $u_n'(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên khoảng $(a; b)$ thì

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

với mọi $x \in (a; b)$.

Tính chất 3: (Lấy tích phân của một chuỗi)

Nếu $u_n(x)$ liên tục trên khoảng $\{a; b\}$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên khoảng $\{a; b\}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ thì

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x).dx.$$

Nhận xét:

Vì sự hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) là sự hội tụ đều trên miền hội tụ của nó.

Các tổng $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ (nếu tồn tại) là một đa thức. Do đó ta có các tính chất sau đây của chuỗi lũy thừa:

Tính chất 1': (Tính liên tục của tổng của chuỗi lũy thừa)

Nếu $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ thì $S(x)$ liên tục trên miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

Tính chất 1'': (Tính liên tục đều của tổng của chuỗi lũy thừa)

Nếu $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ thì $S(x)$ liên tục đều trên đoạn $[a; b]$ thuộc miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

(tức là $\forall \varepsilon > 0, \delta(\varepsilon) : \forall x, x' \in [a; b], |x - x'| < \delta$ thì $|S(x) - S(x')| < \varepsilon$)

Tính chất 2': (Lấy đạo hàm của một chuỗi lũy thừa)

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hội tụ thì $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$

với mọi x miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Tính chất 3: (Lấy tích phân của một chuỗi)

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hội tụ thì

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x-a)^n dx$$

với mọi $x \in [a; b]$ thuộc miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Trong các tính chất 2' và 3', các chuỗi ở vế phải có cùng bán kính hội tụ với chuỗi ban đầu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

2.7 CHUỖI TAYLOR - CHUỖI MACLAURIN:

2.7.1 Định nghĩa: Chuỗi Taylor (Maclaurin) là chuỗi hàm có được bằng cách khai triển Taylor (Maclaurin) hàm số $f(x)$ nào đó đến lũy thừa cấp vô hạn lần

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n)$$

Phần dư tương ứng là

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, c \in (x_0; x) \text{ hoặc } (x; x_0)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x)^{n+1}, c \in (0; x) \text{ hoặc } (x; 0)$$

2.7.2 Điều kiện tồn tại khai triển thành chuỗi Taylor (Maclaurin)

Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi Taylor (Maclaurin) trong khoảng $(x_0 - R; x_0 + R)$ là $f(x)$ khả vi vô hạn lần trong khoảng này và phần dư $R_n(x) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

2.7.3 Một số khai triển Maclaurin của các hàm cơ bản:

$$(1) e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$(3) \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$(4) \operatorname{sh} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$(5) \operatorname{ch} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$(6) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 - \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

với $x \in [-1; 1]$ khi $\alpha \geq 0$; với $x \in (-1; 1]$ khi $-1 < \alpha < 0$ và với $x \in (-1; 1)$ khi $\alpha \leq -1$;

$$(6.1) \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ với } x \in (-1; 1)$$

$$(6.2) \frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \text{ với } x \in (-1; 1)$$

$$(7) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots \text{ với } x \in (-1; 1] .$$

$$(8) \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \text{ với } x \in [-1; 1]$$

Chú ý: (6.1) , 6.2) là trường hợp riêng của (6); còn (7) là hệ quả của (6.1) và (8) là hệ quả của (6.2).

2.8 CHUỖI FOURIER

2.8.1 Định nghĩa: Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ là chuỗi hàm có dạng:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

trong đó:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cdot dx, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \cdot dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Điều kiện khai triển được thành chuỗi Fourier:

2.8.2 Định lý (Định lý Dirichlê)

Nếu hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[-\pi; \pi]$ có hữu hạn các cực trị và liên tục từng khúc, có thể trừ một số hữu hạn điểm gián đoạn loại I (tức là thoả mãn các điều kiện Dirichlê) thì chuỗi Fourier hội tụ về $f(x)$ tại mọi điểm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$.

Nếu $S(x)$ là tổng của chuỗi (F) thì:

- i) $S(x) = f(x)$ tại những điểm $f(x)$ liên tục.
- ii) $S(x) = [f(x-0) + f(x+0)]/2$ tại những điểm $f(x)$ gián đoạn loại I.
- iii) $S(\pi) = S(-\pi) = [f(\pi-0) + f(\pi+0)]/2$.

Nhận xét:

Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì chuỗi (F) có dạng: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ trong đó

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \cdot dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì chuỗi (F) có dạng: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ trong đó

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \cdot dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Trường hợp tổng quát:

2.8.3 Định nghĩa: Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trên đoạn $[-L; L]$ là chuỗi hàm có dạng:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}) \quad (F)$$

trong đó:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Nếu $f(x)$ chẵn thì $b_n = 0$ với mọi n ; Nếu $f(x)$ lẻ thì $a_n = 0$ với mọi n .

2.8.4 Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trên đoạn $[0; L]$

Nếu hàm $f(x)$ cho trên đoạn $[0; L]$, thì để khai triển được thành chuỗi Fourier, ta thác triển hàm $f(x)$ sang hàm $F(x)$ trên đoạn $[-L; L]$ một cách tùy ý. Điều cơ bản là hàm thác triển $F(x)$ thoả mãn định lý khai triển Fourier trên đoạn $[L; L]$ và $F(x) = f(x)$ trên $[0; L]$. Sau đó khai triển thành chuỗi Fourier như là các hàm đã cho trên đoạn $[-L; L]$.

Thông thường, hàm thác triển thuận lợi nhất là hàm mà các giá trị của nó trên đoạn $[-L; 0]$ tìm được từ điều kiện $f(x) = f(-x)$ hoặc $f(x) = -f(-x)$. Trong trường hợp đầu, hàm $f(x)$ trên đoạn $[-L; L]$ là hàm chẵn, trường hợp thứ hai là hàm lẻ. Khi đó các hệ số khai triển Fourier của hàm này (a_n trong trường hợp thứ nhất, b_n trong trường hợp thứ hai) được xác định bằng các công thức đã chỉ ra ở trên cho các hàm số chẵn và hàm số lẻ.

2.8.5 Ý nghĩa của khai triển chuỗi Taylor, Maclaurin, Fourier:

+ Khai triển Taylor, Maclaurin được sử dụng trong các bài toán tìm giới hạn, tìm cực trị, ...

Đặc biệt được sử dụng trong Giải tích số – một trong những ngành học của toán học ứng dụng.

+ Khai triển Fourier là công cụ của Phương trình vật lý toán và giải tích điều hoà. Nó còn là cơ sở để giải các bài toán về phân bố nhiệt,...

2.8.6 Các ví dụ về khai triển Fourier:

Ví dụ 5: Khai triển Fourier của hàm $f(x) = \pi + x$ cho trên đoạn $[-\pi; \pi]$

Đồ thị của hàm này là đoạn nối các điểm $(-\pi; 0)$ và $(\pi; 2\pi)$. Hình vẽ 1 cho ta đồ thị hàm $y = S(x)$, trong đó $S(x)$ là tổng của chuỗi Fourier của hàm $f(x) = \pi + x$. Tổng này là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π là trùng với hàm $f(x)$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Ta cần xác định các hệ số của chuỗi Fourier.

Ta có:
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = 2\pi;$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cos mx dx = 0, \forall m = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx$$

$$b_m = -\frac{2x}{\pi m} \cos mx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi m} \int_0^{\pi} \cos mx dx = -\frac{2}{m} \cos mx + \frac{2}{\pi m^2} \sin mx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (-1)^{m+1}$$

Vậy khai triển Fourier của hàm $f(x)$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ có dạng:

$$f(x) = \pi + x = \pi + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

Ví dụ 6: Tương tự khai triển Fourier của hàm $f(x) = x$ trên $[-\pi; \pi]$ có dạng:

$$f(x) = x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

Ví dụ 7: Khai triển Fourier của hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Hàm đang xét là hàm chẵn, đồ thị của nó là parabol nằm giữa các điểm $(-1; 1)$ và $(1; 1)$. Ở đây $L = 1$, vì vậy:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$a_m = \frac{2}{L} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos mx dx = \dots = \frac{4}{m^2 \pi^2} (-1)^m$$

Bởi vì hàm đang xét là hàm chẵn nên $b_m = 0$ với mọi m .

Vậy khai triển Fourier của hàm $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ có dạng:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos m\pi x \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 4\pi x}{4^2} - \dots \end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tương tự khai triển Fourier của hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ có dạng

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos mx \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Khai triển Fourier của hàm $f(x) = x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Thác triển hàm $f(x)$ thành hàm $F(x)$ trên $[-2\pi; 2\pi]$ như sau:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{với } x \in [0; 2\pi] \\ -f(-x) & \text{với } x \in [-2\pi; 0] \end{cases}$$

Khi đó $F(x)$ là hàm lẻ và thỏa mãn các điều kiện của định lý Dirichlê về khai triển chuỗi Fourier. Do đó ta có:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin mx dx = -\frac{2}{\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx = \int_0^{2\pi} x \cos mx dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Chuỗi Fourier của hàm f hội tụ về $f(x)$ tại $x \in (0; 2\pi)$ và hội tụ về $[f(0) + f(2\pi)]/2 = \pi$ tại $x = 0, x = 2\pi$.

Vậy khai triển Fourier của hàm $f(x) = x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ có dạng:

$$\begin{aligned} f(x) = x &= \pi + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin mx \\ &= 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Tương tự khai triển Fourier của hàm $f(x) = x^2$ trên $[0; 2\pi]$ có dạng:

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\cos mx}{m^2} - \frac{\pi \sin mx}{m} \right)$$

Tại $x = 0, x = 2\pi$ chuỗi hội tụ về $2\pi^2$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3 CHUỖI SỐ - CHUỖI HÀM

A. Chuỗi số

1. Xét sự hội tụ của chuỗi số

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos n\pi)^n}{\sqrt{n}}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{7}{n}\right)^{2n}$

e. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n}$

2. Xét sự hội tụ của chuỗi số

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^2}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8....(3n-1)}{1.5.9....(4n-3)}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số đan dấu sau

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$

B. Chuỗi hàm

4. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$
- b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1} x^n$
- c. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^n$.

5. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n$
- b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-4}{2} \right)^n$
- c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n^2 + 6n + 1}}$
- d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n$
- đ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x+1}{2} \right)^n$.

6. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2}^n \left(\sin \frac{n\pi}{4} \right) \frac{x^n}{n!}$
- b. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} \right) \frac{x^n}{n!}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Thừa Hợp, *Giải tích (tập II)*, NXB ĐHQG HÀ NỘI, 2007.
- [2] Đậu Thế Cấp (Chủ biên), *Giải tích Toán học*, NXB GIÁO DỤC, 2007.
- [3] Nguyễn Thủy Thanh, *Bài tập Giải tích (Tập I)*, NXB GIÁO DỤC, 2002.
- [4] Phan Quốc Khánh, *Phép tính vi tích phân (Tập I)*, NXB GIÁO DỤC, 2001.
- [5] Trần Bình, *Bài tập giải sẵn Giải tích*, NXB KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT, H 2000.
- [6] Y Y Liaskô - A.C Boiatruc - IA Ggai - GP Golovac, *Giải tích toán học - Các ví dụ và các bài tập (Phần I, Tập I)*, Người dịch: Hoàng Đức Nguyên- Đoàn Văn Bản, NXB ĐẠI HỌC VÀ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP, Hà Nội 1979.
- [7] Y Y Liaskô - A.C Boiatruc - IA Ggai - GP Golovac, *Giải tích toán học - Các ví dụ và các bài tập (Phần I, Tập II)*, Người dịch: Hoàng Đức Nguyên- Đoàn Văn Bản, NXB ĐẠI HỌC VÀ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP, Hà Nội 1979.
- [8] P.E. Đankô, A.G. Popôp, Tia. Coogiepnhicôva, *Bài tập Toán học cao cấp (Phần I)*, Người dịch: Hoàng Đức Nguyên, NXB GIÁO DỤC, 1994..
- [9] Jean – Marie Monier, *Giáo trình Toán (Tập 1) Giải tích 1*, Người dịch: Lý Hoàng Tú, Hiệu đính: Nguyễn Văn Thường, NXB GIÁO DỤC, H 2000.
- [10] Jean – Marie Monier, *Giáo trình Toán (Tập 3) Giải tích 3*, Người dịch: Đoàn Quỳnh – Lý Hoàng Tú, NXB GIÁO DỤC, H 2001.